数学的帰納法の形式

2000MM060 森田 智洋
指導教員　佐々木 克巳

1　はじめに

広瀬 [1] は，数学的帰納法についてかかれている文献である．[1] の第 1 章では $Peano$ の公理系や，原始帰納的関数などをとりあげて，数学的帰納法の意味するものを証明しようとしている．第 2 章では，いくつかの帰納法の形式の前提と結論を明確にし，それの比較を行なっている．

本研究の目的は [1] の第 1 章と第 2 章を理解することで，数学的帰納法の理解を深めることである．具体的には，[1] で紹介されている証明を，省略されている部分を補って理解したり，[1] で紹介されている帰納法の形式の具体例を挙げたりした．とくに，定理 2.1 の証明や，[1] の例 2.1 の証明は補った部分が多い．また 3.3 節の例は筆者が挙げた例である．

2　数学的帰納法と数学的帰納法を用いて定義される関数

2.1　標準的な数学的帰納法

自然数についての述語 P に対して，数学的帰納法は，次の (I) と (II) を示せば (III) が証明されたことになる，という形式の証明法である．

(I)　$P(0)$ が成り立つ

(II) 任意の自然数 x に対して，$P(x)$ が成り立つことを仮定すれば，$P(x+1)$ が成り立つ

(III) すべての自然数 x に対して，$P(x)$ が成り立つ

(I) と (II) から (III) を導く手続きが，証明として認められる理由は，以下の $Peano$ の公理系を自然数の公理系として認めることによって，説明することができる．なお，公理系にあらわれる n' は n の次の自然数 $n+1$ をあらわす．

(1) 0 は自然数である

(2) n が自然数のとき，n' も自然数である

(3) n,m が自然数で，$n'=m'$ ならば $n=m$ である

(4) $n+1=0$ となるような自然数 n は存在しない

(5) $P(n)$ を自然数 n についての述語とする．このとき，

·$P(0)$ が成り立つ

· 任意の自然数 k に対して，$P(k)$ が成り立つことを仮定すれば $P(k')$ が成り立つ

の 2 つが証明されれば，

· すべての自然数 n に対して，$P(n)$

が成り立つ．

$Peano$ の公理系を自然数の公理系として認めれば，数学的帰納法とはまさに自然数の性質そのものであり，(I) と (II) から (III) を導く手続きは証明として認められることになる．

2.2　数学的帰納法を用いて定義される関数

$Peano$ の公理系は，自然数を帰納的定義によって定めていると解釈できる．これと同様に，関数を帰納的定義によって定めることがある．この方法で定められた関数を原始帰納的関数といい，自然数上で定義され，自然数値をとる．

そこで，次のような初期関数を考える．

(I)　$S(x)=x+1$

(II) $N(x)=0$

(III) $I_i^n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$

次に与えられた関数から，別の新しい関数を定義するための 2 つの方法 (COM) と (PR) を考える．

(COM)m 変数の関数 ψ と，m 個の n 変数の関数 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_m$ から次のように n 変数の新しい関数 φ を定義する (関数の合成).

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&\quad=\psi(\chi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\chi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\&\qquad\qquad\cdots,\chi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))\end{aligned}$$

(PR)n 変数の関数 ψ と $(n+2)$ 変数の関数 χ から，次のように $n+1$ 変数の新しい関数 φ を定義する (原始帰納法).

$$(PR)\left\{\begin{array}{l}\varphi(0,x_1,x_2,\cdots,x_n)=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \varphi(x+1,x_1,x_2,\cdots,x_n)=\\ \qquad\chi(x,\varphi(x,x_1,x_2,\cdots,x_n),x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{array}\right.$$

(PR) によって新しい関数 φ が定義できることは，次の定理によって保証される．

定理 2.1　(PR) における 2 つの等式を満たす φ が一意に存在する．

初期関数から出発し，関数の合成 (COM) と原始帰納法 (PR) を有限回ほどこすことによって得られる関数を，原始帰納的関数という．

3　さまざまな数学的帰納法をみる

ここでは，さまざまな数学的帰納法を挙げ，それぞれの証明の形式をまとめる．ここでは 2.1 節で述べた帰納法の形を標準的な形ということにする．

3.1　累積帰納法

累積帰納法とは，3.1 に述べた (II) の述語 $P(x)$ を $Q(x)$ とおいたとき，(II) の代わりに

(II') 任意の自然数 k について，$n \leq k$ なるすべての n に対し $Q(n)$ が成立すると仮定すれば，$Q(k+1)$ も成り立つ

でおきかえた形式をとる帰納法である．すなわち，$Q(k+1)$ を証明するとき，$Q(k)$ のみでなく，

$$Q(0), Q(1), Q(2), \cdots, Q(k-1), Q(k)$$

がいずれも成り立つことを仮定し, これを用いる帰納法である．

累積帰納法は，標準的な数学的帰納法と本質的に同等であり，関数を定義する場合にも，互いに原始帰納的となり同等となる．

3.2　2 重帰納法

2 重帰納法とは，次の (I)，(II)，(III) を示せば (IV) が成り立つ，という形式の証明法である．

(I)　すべての自然数 y について $Q(0, y)$ が成り立つ
(II) すべての自然数 x について $Q(x, 0)$ が成り立つ
(III) 任意の自然数 k，l について，$Q(k+1, l)$ および $Q(k, l+1)$ がともに成り立つと仮定すれば $Q(k+1, l+1)$ も成り立つ
(IV) すべての自然数 x, y について $Q(x, y)$ が成り立つ

同様に，これを拡張したものが k 重帰納法である．

ところが標準的な数学的帰納法の繰り返しで証明できないような，2 重帰納法の例は，ほとんどない．しかし関数を定義する場合に，その関数の性質により 2 重帰納法が必要になる．その関数の例として，論文で $Ackermann$ 関数を定義している．

3.3　同時併行帰納法

上で述べた標準的形式の数学的帰納法，累積帰納法,k 重帰納法を基本として，いくつかの命題を同時に併行して証明する方法がある．具体的には，自然数上の m 個の述語 $P_1(x)$,$P_2(x)$,$\cdots$,$P_m(x)$ に対し，次の (I) と (II) を示せば (III) が成り立つという証明法であり，同時併行帰納法という．

(I)　$P_1(0), P_2(0), \cdots, P_m(0)$ が成り立つ
(II) 任意の自然数 k について,『$P_1(k)$,$P_2(k)$,$\cdots$,$P_m(k)$ が成り立つと仮定すれば，$P_1(k+1)$,$P_2(k+1)$,$\cdots$,$P_m(k+1)$ が成り立つ』
(III) すべての x に対し $P_1(x)$,$P_2(x)$,$\cdots$,$P_m(x)$ が成り立つ

(II) については次のような (II') のかたちをとること (累積帰納法を用いたかたち) もある．

(II')　任意の自然数 k について,『$n \leq k$ なるすべての n に対し $P_1(n), P_2(n), \cdots, P_m(n)$ が成立すると仮定すれば，$P_1(k+1), P_2(k+1), \cdots, P_m(k+1)$ も成り立つ』

次に，同時併行帰納法を用いた証明の例を挙げる．この例では，自然数を $1, 2, \cdots$ とする．なお，この例は広瀬 [1] では述べられていない．

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, \cdots$$

という数列 $\{a_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ は，次のように定義することができる．

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n + a_{n+1} = n + 1 \end{cases}$$

ここで自然数上の変数 n を含む 2 個の述語 P_1，P_2 を，次のようにおく．

$$\begin{cases} P_1(n) : a_{2n} = n \\ P_2(n) : a_{2n-1} = n \end{cases}$$

このとき $n > 0$ なるすべての自然数 n について $P_1(n)$ と $P_2(n)$ が成立することが，同時併行帰納法により次のように示される．

(I)　$P_1(1) : a_2 = 1$,$P_2(1) : a_1 = 1$ である.$P_2(1)$ は定義の第一式より成立することがわかる．また，定義の第二式より $a_1 + a_2 = 2$ だから $a_2 = 2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ よって，$P_1(1)$ も成立する．

(II) 任意の自然数 k が与えられたとする．さらに $P_1(k)$，$P_2(k)$ が成り立つと仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)} &= a_{2k+2} \\ &= -a_{2k+1} + 2k + 2 \\ &= -(-a_{2k} + 2k + 1) + 2k + 2 \\ &= a_{2k} + 1 \quad \because \text{帰納法の仮定 } P_1(k) \\ &= k + 1 \end{aligned}$$

だから $P_1(k+1)$ が成立する．また，

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)-1} &= a_{2k+1} \\ &= -a_{2k} + 2k + 1 \\ &= -k + 2k + 1 \quad \because \text{帰納法の仮定 } P_1(k) \\ &= k + 1 \end{aligned}$$

だから $P_2(k+1)$ も成立する．

よって，$n > 0$ なるすべての自然数 n について $P_1(n)$，$P_2(n)$ は成り立つ．

4　おわりに

本研究により数学的帰納法が重要であるという認識をもつことができた．また，数学的帰納法が自然数や実数全体の定理により，その効果が保障されていることによって，少々自信を持って理解，使用していけるだろうと感じている．

参考文献

[1] 広瀬 健：シリーズ 新しい応用の数学 11 数学的帰納法，教育出版 (1992).
[2] 広瀬 健：帰納的関数 共立講座『現代の数学』第 3 巻，共立出版 (1989).