# モンテカルロ法における分散減少法の比較

2001MM094 内田 誠二　　2001MM097 山田 剛義

指導教員　國田 寛

## 1　はじめに

モンテカルロ法とは乱数を使った数値計算法の総称である. 現在ではコンピュテーショナル・ファイナンスと呼ばれる一つの研究分野が立上り, その中でもモンテカルロ法は主要なテーマとなっている. また実務界に目を向けても, 金融機関がリスクや価格を評価するために, モンテカルロ法を広範に用いるようになった. 今回卒業論文として, 分散減少法を用いて精度を高めるには多大の計算時間が必要という問題点の改善に努める.

1. ヨーロピアン・オプション価格について, 単純なモンテカルロ法とブラック・ショールズモデルと比較
2. 誤差分布について, 単純なモンテカルロ法と比較
3. 算術平均ヨーロピアン・オプション価格について, 単純なモンテカルロ法と比較

を行い, 信頼性について検討していく.

## 2　単純なモンテカルロ法について

### 2.1　方法

$\varepsilon_1$ を区間 $[0,1]$ に一様分布する互いに独立な乱数とすると, 単純なモンテカルロ法による解は

$$\hat{m_1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\varepsilon) \tag{1}$$

によって求まる.

### 2.2　誤差分散

このときの誤差分散は

$$V[\hat{m_1}] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V[f(\varepsilon_i)] \tag{2}$$

となる.

### 2.3　ヨーロピアン・オプション

標準正規乱数についての行列,

$$\xi_i = (\xi_{i,1}, \cdots, \xi_{i,M})(i = 1, \cdots, N) \tag{3}$$

を用いて, パスを発生させると以下の式となる.

$$S_{i,M} = S_0 \exp((r_d - \frac{\sigma}{2})T + \sigma\tilde{\xi_i}\sqrt{T}) \tag{4}$$

このペイオフ関数は,

$$A(S_{i,M}) = e^{-rT}\max[S_{i,M} - K, 0] \tag{5}$$

となり, それの平均を取ることでヨーロピアン・コール・オプションの価格を導き出すことができる.

$$\hat{a_1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A(S_{i,M}) \tag{6}$$

### 2.4　算術平均ヨーロピアン・オプション

モンテカルロ法では, 原資産の値動きが, 以下の式を満たしながら変動する.
標準正規乱数についての行列を上記と同様の行列を使うと, このパスは以下の式となる.

$$S_{i,j} = S_0 \exp((r_d - \frac{\sigma}{2})t + \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{M}\tilde{\xi_i}) \tag{7}$$

となる. このときのペイオフ関数は,

$$A'(S_{i,j}) = e^{-rT}\max[\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} S_{i,j} - K, 0] \tag{8}$$

で与えられ, 算術平均ヨーロピアン・コール・オプションの価格は

$$\hat{a'_1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A'(S_{i,j}) \tag{9}$$

で求められる.

## 3　負の相関法 (対照変量法) について

負の相関法 (対照変量法) とは,1 回の乱数の発生でなるべく互いに負の相関を持つ派生証券価格を 2 つ生成し, それらの平均値を取ることによってサンプリング誤差を減らそうとするものである.

### 3.1　誤差分散

$$\begin{aligned} V[\hat{m_2}] &= V[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(\varepsilon_i) + f(-\varepsilon_i)}{2}] \\ &= \frac{1}{N}V[\frac{f(\varepsilon) + f(-\varepsilon)}{2}] \end{aligned}$$

### 3.2　ヨーロピアン・オプション

ヨーロピアン・オプションの価格を求めるとき, 正規乱数を用いる負の相関法では, 各次元で乱数 $\xi$ と乱数 $-\xi$

の対をつくればよい.

よって, ヨーロピアン・コール・オプション価格は

$$\hat{a_2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{A(S_{i,M}) + A(S'_{i,M})}{2} \tag{10}$$

で求められる.

### 3.3　算術平均ヨーロピアン・オプション

負の相関法の算術平均ヨーロピアン・コール・オプション価格は

$$\hat{a'_2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{A'(S_{i,j}) + A'(S'_{i,j})}{2} \tag{11}$$

で求められる.

## 4　制御変量法について

評価対象関数 (モンテカルロ法による解) と解析的に積分値がわかっている関数との差が, モンテカルロ法を用いたことによる誤差であると考えられる.
制御変量法では, 誤差を正確に算出し, その誤差を差し引いた部分にモンテカルロ法を適用し, 精度を上げる方法である.

### 4.1　誤差分散

誤差分散は上記のように評価対象関数と制御変量関数との差によるので, 制御変量法による誤差分散は以下の式で与えられる.

$$V[\hat{m_3}] = V[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\varepsilon_i) - g(\varepsilon_i)] \tag{12}$$

$$= \frac{1}{N}V[f(\varepsilon_i) - g(\varepsilon_i)] \tag{13}$$

(14)

### 4.2　ヨーロピアン・オプション

今回, 制御変量法としてヨーロピアン・オプション価格の解析解は, ブラック・ショールズ式により与えることにする.
求めるヨーロピアン・コール・オプションのペイオフ関数を (5) 式で与え, 解析的に積分値がわかっている関数を制御変量関数とすると初期値 $S'_0$ 行使価格 $K'$ ヨーロピアン・コール・オプションのパスは (4) 式から, 以下の式

$$S_{i,M} = S'_0 \exp((r_d - \frac{\sigma}{2})T + \sigma\tilde{\xi}_i\sqrt{T}) \tag{15}$$

で発生させ, ペイオフ関数を,

$$C(S_{i,M}) = e^{-rT}\max[S_{i,M} - K', 0] \tag{16}$$

すると, 制御変量法によるヨーロピアン・コール・オプション価格の数値解は,

$$\hat{a_3} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A(S_{i,M}) + [C_0^{BS}(S(t), r, \sigma, T, K') - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C(S_{i,M})] \tag{17}$$

となる.

### 4.3　算術平均ヨーロピアン・オプション

算術平均ヨーロピアン・オプション価格の理論積分値も, 初期値 $S'_0$, 行使価格 $K'$ とするブラック・ショールズ式により与えることにする. ヨーロピアン・オプションと同じ条件で, 求める算術平均ヨーロピアン・コール・オプションのペイオフ関数を (8) 式で与え, 制御変量としてのヨーロピアン・コール・オプションのペイオフ関数を (16) で与えると, 制御変量法による算術平均ヨーロピアン・コール・オプション価格の数値解は,

$$\hat{a'_3} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(A'(S_{i,j}) - C(S_{i,M})) + C_0^{BS}(S(t), r, \sigma, T, K') \tag{18}$$

により算出できる.

## 5　回帰分析法

回帰分析法は, 制御変量法を改良したものである.
求めたい派生証券と制御変量との相関の程度が 1 よりかなり小さい時にも, 分散減少効果をなるべく高めようとする方法である.

### 5.1　方法

回帰分析法の解は, 制御変量法で与えた (17) 式に, 定数 $\hat{\beta}_1$ を『重み』として以下のように付け加えたものとなる.

$$\hat{m_4} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(\varepsilon_i) - \hat{\beta}_1 g(\varepsilon_i)) + \hat{\beta}_1 m_g \tag{19}$$

### 5.2　誤差分散

ここで回帰分析を利用するために,

$$y_i = f(\varepsilon_i) \tag{20}$$

$$x_i = g(\varepsilon_i) - m_g \tag{21}$$

とすると, 推定値 $\hat{m_4}$ の誤差分布は

$$V[\hat{m_4}] = V[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[y_i - \hat{\beta}_1 x_i]] \tag{22}$$

$$= \frac{1}{N}(V[y] - 2\hat{\beta}_1 Cov[y,x] + \hat{\beta}_1{}^2 V[x])$$

となる.

### 5.3　ヨーロピアン・オプション

ヨーロピアン・オプション価格の解析解は, 制御変量法と同様に, 初期値 $S_0'$, 行使価格 $K'$ のブラック・ショールズ式により与えることにする.
ヨーロピアン・コール・オプションのペイオフ関数を (5) 式で与え, 制御変量のヨーロピアン・コール・オプションのペイオフ関数を, 初期値 $S_0'$, 行使価格 $K'$ とし,(16) 式で与える.
ここで $y_i$ , $x_i$ を下記の式とする.

$$y_i = A(S_{i,M}) \tag{23}$$
$$x_i = C_0^{BS}(S(t), r, \sigma, T, K') - C(S_{i,M}) \tag{24}$$

これより求める回帰直線を

$$y_i = \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\beta}_0 \tag{25}$$

とし, 回帰分析を行っていく.

$$S_e = \sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{\beta}_1 x_i - \hat{\beta}_0)^2 \tag{26}$$

が, 最小になるように最小 2 乗法を用いて,$\hat{\beta}_0$ $\hat{\beta}_1$ を求める.
$\hat{\beta}_1$ を求めるから，切片 $\beta$ は，

$$\hat{\beta}_0 = E[y] - \hat{\beta}_1 E[x] = \hat{m_4} \tag{27}$$

となり回帰分析を行えば,$\hat{\beta}_1$,$\hat{m_4}$ を同時に求めることが可能である.

### 5.4　算術平均ヨーロピアン・オプション

求めるオプションのペイオフ関数を算術平均にする.

$$y_i = A'(S_{i,j}) \tag{28}$$
$$x_i = C_0^{BS}(S(t), r, \sigma, T, K') - C(S_{i,M}) \tag{29}$$

以下, ヨーロピアン・オプションと同様の手順で回帰分析を行うなう.

## 6　考察

ヨーロピアン・コール・オプション，ヨーロピアン・プット・オプションのそれぞれの価格をモンテカルロ法による分散減少法で, 単純なモンテカルロ法, 負の相関法, 制御変量法, 回帰分析法において, シミュレーション回数を 2,000 回から 2,000 回きざみで 2,000,000 回まで 1,000 個オプション価格をグラフ化し，それぞれの分散減少法の効果を比較した.

### 6.1　分散減少法とブラック・ショールズモデルとの比較

ブラック･ショールズモデルとの比較でブラック･ショールズモデルで求めたヨーロピアン・コール・オプションでは上下に 3 %,(0.03),16.730746 円〜16.744114 円を収束領域とし，ヨーロッピアン・プット・オプションでは上下に 1.5 %，(0. 015)，7.217766 円〜7.217901 円を収束領域とした.
その結果、コール・オプションでは 3 %,(0.03), 16.730746 円〜16.744114 円の収束領域に，一番精度の悪い単純モンテカルロ法で，1,868,000 回目から収束した.
またヨーロピアン・プット・オプションも 1.5 %，(0. 015)，7.217766 円〜7.217901 円の収束領域に，一番精度の悪い単純モンテカルロ法で，1,828,000 回目から収束した.
もちろん，負の相関法, 制御変量法, 回帰分析法の 3 つの分散減少法でも収束が確認された.
これは設定した収束領域の上下区間 (コール・オプションでは 3 %, プット・オプションでは 1.5 %) を満たしていることが分かる.
またコール・オプションとプット・オプションを見比べるとコールの方がオプション価格のばらつきが少ないことが分かった.

### 6.2　分散減少法と単純モンテカルロ法との比較

単純なモンテカルロ法と比較し収束の速さをまず, ヨーロピアン・コール・オプションで比較する. 速度を回数で表すと，単純モンテカルロ法，負の相関法, 制御変量法, 回帰分析法, それぞれの収束速度は以下の表のようになる.

表 1　収束速度 (コール, プット)

| 分散減少法 | コール | プット |
|---|---|---|
| 単純モンテカルロ法 | 1,868,000 回 | 1,828,000 回 |
| 負の相関法 | 992,000 回 | 924,000 回 |
| 制御変量法 | 566,000 回 | 522,000 回 |
| 回帰分析法 | 214,000 回 | 212,000 回 |

この結果から，単純モンテカルロ法に比べて，負の相関法ではコール (約 45 %) プット (約 50 %), 制御変量法ではコール (約 70 %) プット (約 70 %), 回帰分析法では, コール (約 90 %) プット (約 90 %) も速く収束することがわかった.

この結果からわかるように，コール･オプション，プット・オプション共に，負の相関法，制御変量法，回帰分析法の分散減少法の効果は，以下の順位となる.

表 2　分散減少法の順位

| |
|---|
| 1，回帰分析法 |
| 2，制御変量法 |
| 3，負の相関法法 |
| 4，単純モンテカルロ法 |

### 6.3 算術平均ヨーロピアン・オプション価格の算出

モンテカルロ法の利点の一つである，“平均オプション価格の算出” から，今回時間刻みを $1/200$ とし，シミュレーション回数を 25 回から 25 刻みで 25,000 回まで 1,000 個のオプション価格を，単純モンテカルロ法と，負の相関法，制御変量法，回帰分析法の 3 つの分散減少法で算術平均ヨーロピアン・オプション価格を求めた．
まず，シミュレーション回数 25,000 回でのそれぞれの算術平均ヨーロピアン・コール・オプションの価格は以下の表となる．

表 3　オプション価格 (コール, プット)

| 分散減少法 | コール | プット |
|---|---|---|
| 単純モンテカルロ法 | 10.223804 | 4.807746 |
| 負の相関法 | 9.957973 | 4.889113 |
| 制御変量法 | 10.047125 | 4.916231 |
| 回帰分析法 | 10.045457 | 4.915012 |

これより, ヨーロピアン・オプションから回帰分析法が精度が一番高いことがわかった. したがって本研究での算術平均ヨーロピアン・オプションの価格は，以下の表となる．

表 4　オプション価格

| | |
|---|---|
| コール | 10.045457 |
| プット | 4.915012 |

### 6.4 誤差分散

次にシミュレーション回数を 1,000,000 回とし, 誤差分散を以下の表とする．

表 5　誤差分散 (コール, プット)

| 誤差分散 | $call - Var$ | $put - Var$ |
|---|---|---|
| 単純モンテカルロ法 | 573.44333 | 52.164920 |
| 負の相関 | 148.04025 | 37.58891 |
| 制御変量法 | 35.89726 | 7.97100 |
| 回帰分析法 | 0.35666 | 0.07980 |

この 4 つの分散減少法の中で回帰分析法の誤差分散が最小であることがわかる. ここで制御変量法と回帰分析法が大幅に誤差分散が減少したことについて考えると評価対象関数 $f(x)$ と制御変量関数 $g(x)$ が, 似たような関数になっているからである. 回帰分析法は制御変量法の $g(x)$ に重み $\beta_1$ をつけ初期値, 行使価格を変化させなくてもよく, さらに最小 2 乗法を用いることもできるので有効な方法であることがわかる.

しかし制御変量法と回帰分析の欠点として,$g(x)$ が $f(x)$ と似たような関 数でない場合や $f(x)$ と似たような関数がとれない場合は誤差分散も大きくなり, 負の相関法や他の分散減少法を用いた方が良い場合がある.

表 6　誤差分散の効果 (コール, プット)

| 誤差分散 | $call - Var$ | $put - Var$ |
|---|---|---|
| 負の相関法 | 0.2581602 | 0.7205783 |
| 制御変量法 | 0.0625994 | 0.1528039 |
| 回帰分析法 | 0.0006219 | 0.0015297 |

次に表 6 より, 単純モンテカルロ法に比べ, 負の相関法ではコール (約 74 %) プット (約 28 %), 制御変量法ではコール (約 94 %) プット (約 85 %), 回帰分析ではコール (約 99.3 %) プット (約 98.4 %), 誤差が減少した.
負の相関法, 制御変量法, 回帰分析法がすべて単純モンテカルロ法よりも大幅に減少しているので有効であることがわかる.

## 7 おわりに

今回, 本研究ではモンテカルロ法について研究を進めてきた. モンテカルロ法による分散減少法の, 負の相関法, 制御変量法, 回帰分析法により, ヨーロピアン・コール (プット)・オプション, 算術平均ヨーロピアン・コール (プット)・オプションについてプログラムを作成し, シミュレーションをし, 考察をした. 本研究では, すべての方法に対し, 同じ条件を与えたが今後の課題として, 状況, 条件にあった方法を選択し, シミュレーションをしなければならない.

## 8 謝辞

本論文の作成にあたり, 指導教員として御指導頂きました國田寛教授をはじめ, 有益な助言をして頂いた石原氏, 伊藤氏には心から感謝致します.

## 参考文献

[1] 湯前祥二・鈴木輝好：
モンテカルロ法の金融工学への応用,
朝倉書店 (2000).

[2] 森平爽一郎・小島裕：
コンピュテーショナルファイナンス,
朝倉書店 (1997).

[3] 木村正明：
ファイナンス工学入門 第三部：
日科技連 (1994).