偏微分方程式の数値解法
＜経路依存型オプションモデル＞

2001MM063 大泉 紗緒理

指導教員　國田 寛

1　はじめに

有限差分法とは, 偏微分方程式の解を離散近似した差分方程式を解くことによって求める手法である. 今回は, 有限差分法を使ってヨーロピアン型のバニラオプション, およびアジアンオプションの陽解法について研究した.

2　バニラオプション

2.1　偏微分方程式

通貨 S を原資産とするヨーロピアンオプションの価格 $C(t)$ を時間 t と S の関数として $C(t) = f(t, S)$ と書くと $C(t)$ の従うブラックショールズ方程式は, 次のように書ける.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + (r_d - r_f) S \frac{\partial f}{\partial S} - r_d f = 0 \qquad (1)$$

T は満期時点,σ はボラティリティ,r_d, r_f は利子率である.

2.2　陽解法

偏微分方程式の差分近似として, 以下を使う.

$$\frac{\partial f}{\partial S}(t_i, S_j) \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S}(\text{中心}) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t_i, S_j) \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{ij} + f_{i,j-1}}{(\Delta S)^2}(\text{中心}) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, S_j) \approx \frac{f_{ij} - f_{i-1,j}}{\Delta t}(\text{後退}) \qquad (4)$$

(1) に (2)(3)(4) を代入すると,

$$f_{i-1,j} = A_j f_{i,j+1} + B_j f_{ij} + C_j f_{i,j-1} \qquad (5)$$
$$(i = 1, \cdots, M; \quad j = 1, \cdots, N-1)$$

このとき次のようにおいた.

$$A_j = \frac{\Delta t}{2\Delta S}\left((r_d - r_f)S_j + \frac{\sigma^2 S_j^2}{\Delta S}\right)$$

$$B_j = 1 - \sigma^2 S_j^2 \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} - r_d \Delta t$$

$$C_j = \frac{\Delta t}{2\Delta S}\left(-(r_d - r_f)S_j + \frac{\sigma^2 S_j^2}{\Delta S}\right)$$

M は時間の分割数,N は原資産の分割数である.

2.3　境界条件

2.3.1　コールオプション

満期時点におけるペイオフは $max[0, S_T - E]$ であるから, $j = 0, 1, 2 \cdots, N$ に対して

$$f(t_M, S_j) = \begin{cases} S_i - E & (S_i \geq E) \\ 0 & (S_i < E) \end{cases}$$

また, 境界条件は,
S が十分小さいとき,

$$f(t_i, S_0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, M$$

S が十分大きいとき,

$$f(t_i, S_N) = S_N e^{-r_f(T-t_i)} - E e^{-r_d(T-t_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, M$$

となる.E は行使価格である.

2.3.2　プットオプション

満期時点におけるペイオフは $max[0, E - S_T]$ であるから,
$j = 0, 1, 2 \cdots, N$ に対して

$$f(t_M, S_j) = \begin{cases} 0 & (S_i > E) \\ E - S_i & (S_i \leq E) \end{cases}$$

また, 境界条件は,
S が十分大きいとき,

$$f(t_i, S_N) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, M$$

S が十分小さいとき,

$$f(t_i, S_0) = E e^{-r_d(T-t_i)} - S_0 e^{-r_f(T-t_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, M$$

となる.

2.4　安定条件

陽解法を用いて偏微分方程式を解く場合には, 原資産の刻み幅である ΔS, 時間の刻み幅である Δt に関する次の条件を満たす必要がある.

$$0 < \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \qquad (6)$$

このとき $\Delta x = \frac{\Delta S}{S}, \quad \Delta\tau = -\frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t$ である.

3　アジアンの偏微分方程式

アジアンオプションとは, 事前に決めたある期間中のランダムウォークする資産の平均価格に依存して資産を買う権利を与える契約である. アジアンオプションにはいくつかの種類があるが, 行使価格が常に行使時点以前のある期間にわたる原資産価格の平均に関係することが共通の特徴である. 今回は, 算術平均ストライクオプションについて研究した.

3.1　偏微分方程式

ペイオフが S と $I=\int_0^T g(S(\tau),\tau)d\tau \cdots(7)$ という変数に依存するオプションについて考える. このとき,g は S と t に依存する既知の関数であるとする.(7) は $t=0$ ～$t=T$ までの S の経路全体について実行される. 資産価格の時間経路は, 原時点の資産価格の値から独立であるから,I と S と t を独立変数と考えることができる. ペイオフは I と S の両方に依存するから, オプションの価値は $f(S,I,t)$ と書ける. よって, オプション価値を規定する偏微分方程式は,

$$\frac{\partial f}{\partial t}+S\frac{\partial f}{\partial I}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+rS\frac{\partial f}{\partial S}-rf=0 \quad (7)$$

となる. ここで,2 変数関数 H を導入し,

$$R=\frac{I}{S},\quad f(S,I,t)=SH(t,R) \quad (8)$$

と定義することで,3 次元の問題を 2 次元に帰着させることができる. (9) により変換すると,

$$\frac{\partial f}{\partial t}=S\frac{\partial H}{\partial t},\qquad \frac{\partial R}{\partial I}=\frac{1}{S},\qquad \frac{\partial R}{\partial S}=-\frac{R}{S}$$

であるから,

$$\frac{\partial f}{\partial I}=\frac{\partial H}{\partial R},\quad \frac{\partial f}{\partial S}=H-R\frac{\partial H}{\partial R}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=\frac{R^2}{S}\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}$$

となり, これらを (8) に代入すると, 次を得る.

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}+(1-rR)\frac{\partial H}{\partial R}=0 \quad (9)$$

3.2　陽解法

(10) に (2)(3)(4) を代入すると,

$$f_{i-1,j}=A_jf_{i,j+1}+B_jf_{i,j}+C_jf_{i,j-1} \quad (10)$$
$$(i=1,2,\cdots,M;j=1,2,\cdots,N-1)$$

が得られる. このとき, 次のようにおいた.

$$A_j=\frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta R}-\frac{1}{2}rj\Delta t$$

$$B_j=1-\sigma^2j^2\Delta t$$

$$C_j=\frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta R}+\frac{1}{2}rj\Delta t$$

3.3　境界条件

3.3.1　コールオプション

満期時点におけるペイオフは,$Smax[0,1-\frac{R}{T}]$ であるから, $j=0,1,2\cdots,N$ に対して

$$f(t_M,R_j)=\begin{cases}1-\frac{R}{T} & (1\geq\frac{R}{T})\\ 0 & (1<\frac{R}{T})\end{cases}$$

境界条件は,
R=0 のとき

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial R}=0 \quad (11)$$

(12) を差分近似すると,

$$\frac{H(t_i,0)-H(t_{i-1},0)}{\Delta t}+\frac{H(t_i,R_1)-R(t_i,0)}{\Delta R}=0$$

より, 次のものを得る.

$$f_{i-1,0}=(1-\frac{\Delta t}{\Delta R})f_{i,0}+\frac{\Delta t}{\Delta R}f_{i,1}$$

R が十分大きいとき,$H(t,R_N)=0$ となる.

3.3.2　プットオプション

満期時点におけるペイオフは,$Smax[0,\frac{R}{T}-1]$ であるから, $j=0,1,2\cdots,N$ に対して

$$f(t_M,R_j)=\begin{cases}0 & (\frac{R}{T}<1)\\ \frac{R}{T}-1 & (\frac{R}{T}\geq1)\end{cases}$$

境界条件は, コールオプションと同じである.

4　プログラム実行

次の表は N=100,M=500,S_0=K=150,tau=R=1,r=0.05, sigma=0.02 で計算したものである. 安定条件は (6) より $M\geq400$ である.

表 1　陽解法 (M = 500)

	バニラ	アジアン
コール	15.664187	10.310302
プット	8.360277	7.516605

5　おわりに

プログラムを実行した結果, バニラオプションの値よりもアジアンオプションの値の方が低くおさえられている. よってアジアンオプションの方がリスクを最小限におさえていることが分かった.

6　謝辞

本研究を進めるにあたり, 指導してくださった國田寛教授と, 御協力してくださった皆様に, 心より感謝いたします.

参考文献

[1] 森平爽一朗, 小島裕:コンピュテーショナル・ファイナンス, 朝倉書店 (1997).

[2] 木島正明, 長山いづみ, 近江義行:ファイナンス工学入門 第三部 数値計画法, 日科技連 (1996).

[3] Paul Wilmott Sam Howison Jeff Dewynne 著:デリバティブの数学入門, 共立出版 (2002).