モンテカルロ法によるオプション評価
-モンテカルロ法によるリスクパラメータの計算-

2001MM047 松本 樹人

指導教員　國田 寛

1　はじめに

オプション評価を行うためにはいくつかの解法があるが，本研究では" モンテカルロ法" に注目する．モンテカルロ法とは，乱数を用いたシミュレーションを何度も行うことにより近似解を求める計算手法であり，金融商品のリスク量や価格などを求めるために用いられる．本研究では，特にモンテカルロ法によるリスクパラメータ・デルタを算出，考察していく．

2　モンテカルロ法によるリスクパラメータの算出

モンテカルロ法によって求められたリスク指標は、相対的に精度が高く，計算時間も少なくてすむ．本研究では，初期原資産価格の価格変化に対するオプションの変化率' リスクパラメータ・デルタ' を， 差分商による近似， パスワイズ微分法，サンプルパスを微分する方法，密度関数を微分する方法の 4 通りの方法で求めた．これらの方法によって計算された値を，解析解であるブラック・ショールズ・モデルで得られる，

$$\text{デルタ}\quad (\Delta):\qquad \frac{\partial c}{\partial S_0} = \Phi(d)) \tag{1}$$

の値とを比較し考察していく．

2.1　差分商による近似

オプションのデルタ $(\hat{\Delta})$ とは，原証券の現在価格 (S_0) から微少変化 h，すなわち $(S_0+\mathrm{h})$ へと微少変化したときの、オプション価格の変化分なので，

$$\hat{\Delta} = \frac{\hat{c}(S_0+h) - \hat{c}(S_0)}{h} \tag{2}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{C_i(S_0+h) - C_i(S_0)}{h} \tag{3}$$

により算出できる．ここで重要なことは，デルタは原証券の価格がオプション価格の変化に与える影響度合を意味するわけであるから，金利やボラティリティといった要因はもちろんのこと，乱数を変化させてはならない．

2.2　パスワイズ微分法

差分商による近似では，同じ乱数を用いてはいるものの，満期日の原証券 の価格とそれに対応するオプション価格を 2 回計算する必要があった．しかし，オプションの持つ性格を利用すると，デルタ $\hat{\Delta}$ あるいは他のリスクパラメータの計算方法はより簡単になる．

$$x \equiv (r_f - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}z_j \tag{4}$$

と定義し，$\acute{S_T}$ を時点ゼロの所与の株価 S_o を微少変化させたときの満期株価とすると，$S_T = S_0e^x, \acute{S_T} = \acute{S_0}e^x$ であるから

$$\Delta = \frac{C(\acute{S_T}) - C(S_T)}{\acute{S_0} - S_0}$$

$$= e^{-(\frac{\sigma^2}{2})T} e^{(\sigma\sqrt{T}\tilde{z})} \tag{5}$$

モンテカルロ法によってデルタ $\hat{\Delta}$ を計算するにあたっては、単に異なった標準正規乱数 $\tilde{z_1},\tilde{z_2},\cdots \tilde{z_n}$ を与えて計算したときの $\exp(\sigma\sqrt{T}\tilde{z})$ の平均値を計算し，$exp(-(\frac{\sigma^2}{2})T)$ を掛ければよい．$exp(-(\frac{\sigma^2}{2})T)$ は定数である．

2.3　サンプルペイオフを微分する方法

サンプルペイオフを微分する方法では，リスクパラメータとオプション価格を同時に算出することができ，かつ，バイアスのないリスクパラメータを算出することができる．

ヨーロピアンコールオプションを考える．

$$C_i = e^{-rT}\max[S_{iT} - K, 0]$$

で定義されるオプションペイオフはサンプルパス S_{iT} の関数であることに注意し，これをサンプルペイオフとよぶことにする．

サンプルペイオフ C_i の S_o による微分は S_{iT} を介する合成関数の微分を用いて

$$\frac{\partial C_i}{\partial S_0} = \frac{\partial C_i}{\partial S_{iT}}\frac{\partial S_{iT}}{\partial S_0} = e^{-rT}1_{\{S_{iT}\geq K\}}\frac{S_{iT}}{S_0} \tag{6}$$

のようにできる．これをサンプルデルタと呼ぶことにする．

理論値 c は S_0 に関して滑らかな関数なので，期待値演算 E と微分の順序を入れ替えることができて，

$$\frac{\partial C}{\partial S_0} = \frac{\partial}{\partial S_0}E[C_i] = E\left[\frac{\partial C_i}{\partial S_0}\right] \tag{7}$$

が成立する．つまりサンプルデルタ $\frac{\partial C_i}{\partial S_0}$ をシミュレーションのパスごとに計算し，その期待値を計算すればデルタが得られる．

2.4　密度関数を微分する方法

密度関数を微分する方法は，原資産価格の満期における分布が陽にわかっていることを 1 つの条件として，バイアスのないリスクパラメータをオプション価格と同時に算出できる．

行使価格 K，満期 T のヨーロピアンコールオプションを考える．満期において株価 S_T は

確率密度

$$g(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{8}$$

$$z = \frac{\log(\frac{x}{S_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{9}$$

に従う．そうすると，ヨーロピアンコールオプションの価格 c は

$$\begin{aligned} c &= E\left[e^{-rT}\max[S_T - K, 0]\right] \\ &= E\left[e^{-rT}max[S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}z} - K, 0]\right] \\ &= \int_0^\infty e^{-rT}max[S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}z} - K, 0]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \end{aligned} \tag{10}$$

ここで

$$x = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}z} \tag{11}$$

とおくと

$$dx = \sigma\sqrt{T}xdz \tag{12}$$

$$dz = \frac{dx}{\sigma\sqrt{T}x} \tag{13}$$

(??)(??) を (??) 式に代入すると

$$c = \int_0^\infty e^{-rT}\max[x - K, 0]\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{z^2}{2}}dx$$

(??) 式より

$$= \int_0^\infty e^{-rT}\max[x - K, 0]g(x)dx \tag{14}$$

と表現できる．

ここで確率密度関数 g(・) は S_0 に関して滑らかな関数なので，微分と積分の順序が交換できて，デルタは

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial S_0} &= \frac{\partial}{\partial S_0}\left(\int_0^\infty e^{-rT}\max[x - K, 0]g(x)dx\right) \\ &= \int_0^\infty e^{-rT}\max[x - K, 0]\frac{\partial g(x)}{\partial S_0}dx \\ &= \int_0^\infty e^{-rT}\max[x - K, 0]\frac{\partial log[g(x)]}{\partial S_0}g(x)dx \\ &= E\left[e^{-rT}max[X - K, 0]\frac{\partial log[g(X)]}{\partial S_0}\right] \end{aligned} \tag{15}$$

ここで (??) 式から

$$\frac{\partial log[g(x)]}{\partial S_0} = \frac{log(\frac{x}{S_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{S_o\sigma^2} \tag{16}$$

であるから，(??) 式をモンテカルロ法により算出すればデルタが求まる．

3　考察

以上の方法でプログラムを作成し考察する．

パラメータ

・現在の株価：$S_0 = 100$・ボラティリティ：$\sigma = 0.3$
・満期：$T = 1$・利率：$r = 0.1$
・行使価格：$K = 100$・パス発生回数：$N = 1000000$
・微少変化：h=0.01

このときのデルタの値とパス発生回数 200,400,600, …,100000 それぞれの時点における標本数 500 のデルタ値平均は，

	デルタ	デルタ値平均
ブラックショールズ	0.685570	———
差分商による近似	0.687525	0.685596
サンプルペイオフを微分する方法	0.687488	0.685539
密度関数を微分する方法	0.687391	0.685642

それぞれ 4 つの方法で得られるデルタ値は，どれも精度の高い結果が得られているが，その中でもパスワイズ微分法がよりブラックショールズ値に近付いた．今回のヨーロピアンコールオプションのリスクパラメータデルタを求めるには，バイアスがなくかつブラックショールズモデルにより速く収束したサンプルペイオフを微分する方法が効果的であるといえる．

4　おわりに

本研究ではリスクパラメータとして，初期原資産価格の価格変化に対するオプションの変化率’デルタ’について研究・考察してきたが，デルタの原資産に対する感応度，すなわち原資産に関する 2 階の偏微分であるガンマといった，他のリスクパラメータについて検討することも大切である．

5　謝辞

本研究を進めるにあたり，二年間熱心に御指導して頂いた指導教員の國田教授をはじめ，多大な協力，有益な助言を頂いた，石原先輩，伊藤先輩，諸先輩方に深く感謝致します．

参考文献

[1] 森平爽一朗 小島裕：コンピュテーショナル・ファイナンス, 朝倉書店 (1997).
[2] 湯前祥二 鈴木輝好：モンテカルロ法の金融工学への応用, 朝倉書店 (2000).