

多項モデルによるオプションプライシング

2001MM032 片平 英樹

2001MM098 山田 卓矢

指導教員 國田 寛

1 はじめに

2項モデルを近似計算するとブラック・ショールズモデルが導き出される。それを多項モデルへと拡張するとブラック・ショールズモデルだけでなく、ジャンプのあるモデルについても導き出される場合がある。本研究はそのジャンプのあるモデルに重点を置き、理論的に解を求める。

2 2項モデル・3項モデル

2項モデルは、原資産価格 $S(n)$ について、次の時点での価格が確率 p で S_u に上昇するか、確率 q で S_d に下降するかの2通りの経路をとる。3項モデルは、上昇と下降の間にもう1つノード S_m を加えたモデルである。このときの確率を p_1, p_2, p_3 とし、 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ とする。

2.1 3項モデルからブラック・ショールズ式へ

まず、簡単にするために $r_d = r, r_f = 0$ とする。満期を T , 期間を N 等分して $\Delta t = \frac{T}{N}$ とおいた場合の割引価格過程の式を求める。

$$S(T) = SY_1 \cdots Y_T$$

ここで Y_1, \dots, Y_T を3点 $e^u, e^m, e^d (> 0)$ の値をとる独立同分布をもつ確率変数をそれぞれ、

$$P(Y_1 = e^u) = P_u = \frac{1}{6}, P(Y_1 = e^m) = P_m = \frac{2}{3}, P(Y_1 = e^d) = P_d = \frac{1}{6}$$

とする。このとき、

$$S^*(T) = e^{-rT} S(T)$$

とおく。

次に、正規分布にちかづけるため対数をとるように書き直すすと、

$$\log S^*(T) = \log S + \sum_{i=1}^N X_i$$

X_i を3点 $\log \frac{u}{1+r\Delta t} = \log u'$, $\log \frac{m}{1+r\Delta t} = \log m'$, $\log \frac{d}{1+r\Delta t} = \log d'$ の値をとる独立同分布をもつ確率変数とする。

さらに次式のような3項モデル列に書き直す。

ここで、 X_i の分布は N によるので固定して X_i^N と書く。

$$\log S_N^*(T) = \log S + \sum_{i=1}^N X_i^N$$

X_i^N の平均、分散を求める。

$$\begin{aligned} E[X_i^N] &= P_u(\log u') + P_m(\log m') + P_d(\log d') \\ &= \mu\Delta t = \frac{\mu T}{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_i^N] &= P_u(\log u' - \mu\Delta t)^2 + P_m(\log m' - \mu\Delta t)^2 \\ &\quad + P_d(\log d' - \mu\Delta t)^2 \\ &= \sigma^2\Delta t = \frac{\sigma^2 T}{N} \end{aligned}$$

ここで、リヤプノフの中心極限定理を使う。

その結果、 $\log \frac{S_N(T)}{S}$ の分布は、 $N(\mu T, \sigma^2 T)$ に収束する。

S_N^* のコールオプションの時点0の価格は、

$$C_N = E_Q[e^{-rT}(S_N(T) - K)^+] = E_Q[(S_N^*(T) - e^{-rT}K)^+]$$

ここで、 $N \rightarrow \infty$ とすると、 S_N^* の分布は、 Se^Z の分布に収束する。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = E[(Se^Z - e^{-rT}K)^+]$$

ただし Z は $N(\mu T, \sigma^2 T)$ に従う確率変数。

これらより、以下の式が求められる。

$$C_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} (Se^{\sigma\sqrt{T}x + \mu T} - e^{-rT}K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

いま、 $Se^{\sigma\sqrt{T}\gamma + \mu T} = K$ をみたます数、すなわち、

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\log \frac{K}{S} - \mu T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= -(h - \sigma\sqrt{T}) \end{aligned}$$

とすると、

$$C_\infty = SN(h) - Ke^{-rT}N(h - \sigma\sqrt{T})$$

$$h = \frac{\log \frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

以上よりこれらの式が得られる。

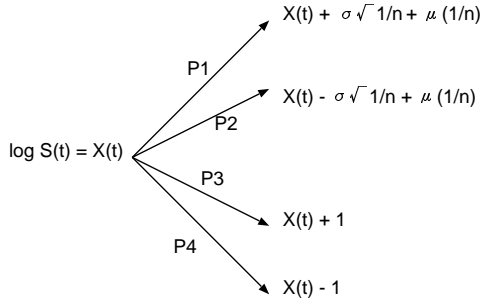
3 ジャンプ過程

ブラック・ショールズモデルでは、株式の価格は時間に関する連続な関数であり、この性質がモデルの特徴の1つでもある。しかし、まれに起きる事象(ある経済指標の発表、国際情勢の変化、大きな政変、自然災害)が価格の急激な変化をもたらす可能性がある。このような現象をモデル化するためには、道が不連続であるような確率過程を導入する必要がある。

「ジャンプがある」モデルは多くの場合、ブラック・ショールズモデルとは異なる注目すべき特色をもっている。そ

これは、オプションを完璧にヘッジできない非完備な市場モデルであるということである。それゆえ、複製ポートフォリオを用いての価格付けはもはやできない。したがって、価格付けとヘッジに対する可能なアプローチは、リスクの概念を定義しそのリスクを最小にするように価格とヘッジを選ぶことである。

4 ジャンプのある4項モデル



ただし, $X_1^N \dots X_N^N$: 独立同分布でそれぞれのとる確率を, 次のように, P_1 と P_2 を大きくし, P_3 と P_4 を小さくする.

$$P_1 = P(X_i^N = \sigma\sqrt{\frac{1}{N}} + \mu\frac{1}{N}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{N}),$$

$$P_2 = P(X_i^N = -\sigma\sqrt{\frac{1}{N}} + \mu\frac{1}{N}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{N}),$$

$$P_3 = P(X_i^N = 1) = p\frac{\lambda}{N}, P_4 = P(X_i^N = -1) = q\frac{\lambda}{N}$$

ここで, $p + q = 1$ とする.

逆に, これらのとり得る値を, x_1, x_2 は小さく, x_3, x_4 は大きく変動するように設定する.

$$x_1 = \sigma\sqrt{\frac{1}{N}} + \mu\frac{1}{N}, x_2 = -\sigma\sqrt{\frac{1}{N}} + \mu\frac{1}{N}$$

$$x_3 = 1, x_4 = -1$$

この分布の NT ステップの特性関数を,

$$\varphi(z) = E[e^{iz(\sum_{i=1}^{NT} X_i^N)}] = \prod_{j=1}^{NT} E(e^{izX_j^N})$$

とおく. 右辺の各値は,

$$E(e^{izX_j^N}) = e^{izx_1}P_1 + e^{izx_2}P_2 + e^{izx_3}P_3 + e^{izx_4}P_4$$

と表される. この式において, x_1, x_2 の指数部分をテイラー展開して高次の項をオーダーとすると,

$$E(e^{izX_j^N}) = (1 + iz(\sigma\sqrt{\frac{1}{N}} + \mu\frac{1}{N}))$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}z^2(\sigma\sqrt{\frac{1}{N}} + \mu\frac{1}{N})^2(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2N}) \\ & + (1 + iz(-\sigma\sqrt{\frac{1}{N}} + \mu\frac{1}{N})) \\ & -\frac{1}{2}z^2(-\sigma\sqrt{\frac{1}{N}} + \mu\frac{1}{N})^2(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2N}) \\ & + e^{iz}p\frac{\lambda}{N} + e^{-iz}q\frac{\lambda}{N} + o(\frac{1}{N}) \\ & = 1 + \mu\frac{1}{N}iz - \frac{1}{2}z^2\sigma^2\frac{1}{N} - \frac{1}{2}z^2(\mu\frac{1}{N})^2 \\ & - \frac{\lambda}{N} - \mu\frac{1}{N}iz\frac{\lambda}{N} + \frac{\lambda}{2N}z^2\sigma^2\frac{1}{N} + \frac{\lambda}{2N}z^2(\mu\frac{1}{N})^2 \\ & + e^{iz}p\frac{\lambda}{N} + e^{-iz}q\frac{\lambda}{N} + o(\frac{1}{N}) \\ & = 1 - \frac{\lambda}{N} + \mu\frac{1}{N}iz - \frac{1}{2}z^2\sigma^2\frac{1}{N} \\ & + e^{iz}p\frac{\lambda}{N} + e^{-iz}q\frac{\lambda}{N} + o(\frac{1}{N}) \\ & = 1 + \frac{\lambda}{N}(pe^{iz} + qe^{-iz} - 1) \\ & + iz\mu\frac{1}{N} - \frac{1}{2}z^2\sigma^2\frac{1}{N} + o(\frac{1}{N}) \end{aligned}$$

これを, 特性関数に代入する.

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= (1 + \frac{\lambda}{N}(pe^{iz} + qe^{-iz} - 1) + iz\mu\frac{1}{N} \\ & - \frac{1}{2}z^2\sigma^2\frac{1}{N})^{NT} \\ & \rightarrow \exp(\lambda(pe^{iz} + qe^{-iz} - (p + q)) + iz\mu - \frac{1}{2}z^2\sigma^2)T \\ & = \exp(\lambda((e^{iz} - 1)p + (e^{-iz} - 1)q) \\ & + iz\mu - \frac{1}{2}z^2\sigma^2)T \end{aligned}$$

ここで, $\lambda((e^{iz} - 1)p + (e^{-iz} - 1)q)$ は, $P(Y_k = 1) = p, P(Y_k = -1) = q$ かつパラメータ λ の複合ポアソン過程の特性関数であり, $iz\mu - \frac{1}{2}z^2\sigma^2$ は, 平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布の特性関数である. $S_N(t) = e^{\sum_{i=1}^{NT} X_i^N}$ とおくと, $\log S_N(T)$ は, $X(T) + Y(T)$ に法則収束する. ここで, $X(T) : Y(T)$ は互いに独立で,

$$X(T) = (rd - rf - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T$$

となり, $N(\mu, \sigma^2)$ のブラウン運動. また, $Y(T)$ は,

$$Y(T) = \sum_{k=1}^{N(T)} Y_k$$

の複合ポアソン過程と表される. さらに,

$$e^{Y(T)} = e^{\sum_{k=1}^{N(T)} Y_k} = \prod_{k=1}^{N(T)} e^{Y_k} = \prod_{k=1}^{N(T)} (1 + U_k)$$

となる. よって, $S_N(T) = S e^{\sum_{i=1}^{NT} X_i^N}$ は,

$$S(T) = e^{X(T) + Y(T)}$$

$$= S e^{(rd - rf - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} \prod_{j=1}^{N(T)} (1 + U_j)$$

に法則収束する。\$S(T)\$ は、ブラック・ショールズモデルで突然のジャンプを許したモデルである。

- (注) ジャンプのある3項モデル

4項モデルにおいて \$p = 1, q = 0\$ とおくと3項モデルとみなせるので4項モデルの結果より、

$$\varphi(z) = \exp(\lambda(e^{iz} - 1) + iz\mu - \frac{1}{2}z^2\sigma^2)T$$

が成立する。

5 不完備市場の問題

多項モデルで価格評価を行う場合、完備なのか、もしくは不完備なのかという問題が生じる。

2項モデルでは、リスク中立確率のアップの確率を \$p\$, ダウンの確率を \$q\$ とした時、株価 \$S, S_u, S_d\$, が

$$\begin{cases} pS_u + qS_d = S(1+r) \\ p+q = 1 \end{cases}$$

を満たす \$u, d\$, 利子率 \$r\$ を与えた時、\$p, q\$ は唯一つ定まるのでリスク中立確率が唯一つとなる。したがって完備であるといえる。

一方、3項モデルでは、アップの確率を \$p_1\$, ミドルの確率を \$p_2\$, ダウンの確率を \$p_3\$, とすると株価 \$S, S_u, S_m, S_d\$ は

$$\begin{cases} p_1S_u + p_2S_m + p_3S_d = S(1+r) \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

を満たす \$u, m, d\$, 利子率 \$r\$ を与えた時、このような \$p_1, p_2, p_3\$ は一意に定めることはできない。したがって不完備であるということになる。また、3項以上の多項モデルでも同様のことがいえる。

その他にブラック・ショールズモデルではすべてのオプションが完全にヘッジできるので完備である。また多項モデルを用いたジャンプモデルでは、必ずしもヘッジ出来ないオプションがあり、別のやり方でリスクを最小にするヘッジを求める必要がある。

6 グラフによるオプション価格の変動

パラメータ

以下の結果は
 現在の為替レート : \$S_0=100.0\$
 権利行使価格 : \$K=100.0\$ 国内金利 : \$rd=0.02\$
 外国金利 : \$rf=0.08\$ ボラティリティ : \$sigma=0.1\$
 残存期間 : \$tau=1.0\$
 を用いた。

これらの図はすべて、縦軸にオプション

価値、横軸に分割数をとったものである。

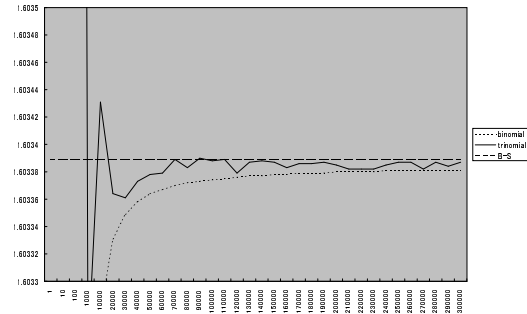


図1 ヨーロピアンコールオプション
解析解 (B-S)=1.603389

これより、2項モデル・3項モデルともにブラック・ショールズ式に収束していくことが確認できる。また、3項モデルの方が2項モデルより強く収束していることがわかる。

しかし、3項モデルは、一度解析解に近付いたとしてもまたわずかに離れていくという波形を繰り返している。一方の2項モデルは、収束は弱いながらもらかな波形で解析解に近付いていることが見てとれる。

分割数を1~100までとしてグラフを書いたときは、2項モデルが大きく振動しながら収束していき、3項モデルがなめらかに収束していたので逆の結果がでている。

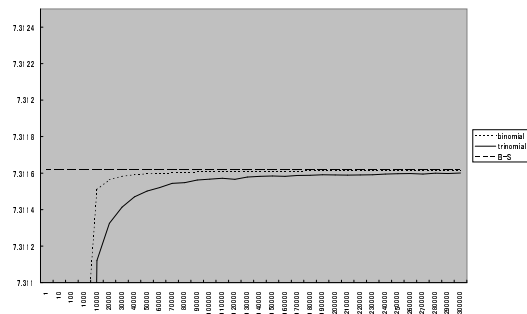


図2 ヨーロピアンプットオプション
解析解 (B-S)=7.311621

コールオプションと同様にどちらのモデルも解析解に収束していることがわかる。

プットオプションでも3項モデルの方が収束が強いと考えていたが、2項モデルの方が強い収束を示し、安定していることがわかった。

表 1 ヨーロピアンコールオプション

分割数	2項モデル	3項モデル	B-S
100	1.592629	1.605894	1.603389
1000	1.602308	1.603247	1.603389
10000	1.603277	1.603431	1.603389
100000	1.603374	1.603388	1.603389
200000	1.60338	1.603385	1.603389
300000	1.603381	1.603387	1.603389

表 2 ヨーロピアンプットオプション

分割数	2項モデル	3項モデル	B-S
100	7.300861	7.259854	7.311621
1000	7.310541	7.306055	7.311621
10000	7.31151	7.311121	7.311621
100000	7.311607	7.311567	7.311621
200000	7.311612	7.31159	7.311621
300000	7.311614	7.311601	7.311621

通常の3項モデルと比較して,+1ジャンプは、始めに大きくジャンプして、徐々に3項モデルに近づく。次に,-1ジャンプは、あまりジャンプせず,+1ジャンプと同様に近づく。

分割数	3項モデル	+1 jump	-1 jump	B-S
100	1.605472	2.734603	1.044601	1.603389

	3項モデル	+1 jump	-1 jump
B-Sとの差	0.002083	1.131214	0.558788

さらに、分割数 $N = 100$ とした場合、ブラック・ショールズの解析解と比較すると、3項モデルのコールオプションの価値=1.605472とは0.002083離れており,+1ジャンプのコールオプションの価値=2.734603とは1.131214離れており,-1ジャンプのコールオプションの価値=1.044601とは0.558788離れている。

7 おわりに

数値解析の結果2項モデル・3項モデルともにブラック・ショールズに収束することが実際に確認できた。2項モデルと3項モデルの比較については、当初、3項モデルのほうが収束が速いと考えており、コールオプションに関しては、そのような結果が得られた。しかし、プットオプションに関しては、予想に反して2項モデルの方が収束が速いという結果を得られた。

また、ジャンプモデルについては、ブラック・ショールズモデルの仮定では捉え切れない事象の説明を可能にしたといえる。しかし、ブラウン運動と複合ポアソン過程の2つを不確実性の根本にもつ場合、リスク資産が原資産とそのオプションの2資産しかないという市場の不完備性の問題が生じており、リスクを最小にするヘッジを求める必要がある。

謝辞

本研究を進めるにあたり、熱心に御指導くださり、また多大な助言をいただいた南山大学数理情報学部数理科学科の國田寛教授と、大学院生の石原、伊藤両先輩には深く感謝致します。ならびに、國田ゼミの皆様にも深く感謝致します。

参考文献

- [1] 森平爽一郎 小島裕：
コンピュータシヨナル・ファイナンス，
朝倉書店 (1997)。
- [2] Les Clewlow/Chris Strickland：
金融工学プログラミング，
エコノミスト社 (2001)。

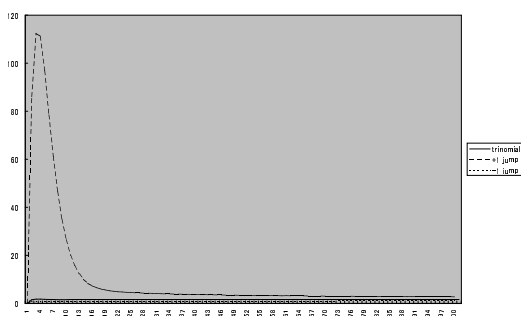


図 3 ジャンプモデル

図 3 を拡大したグラフを図 4 に示した。

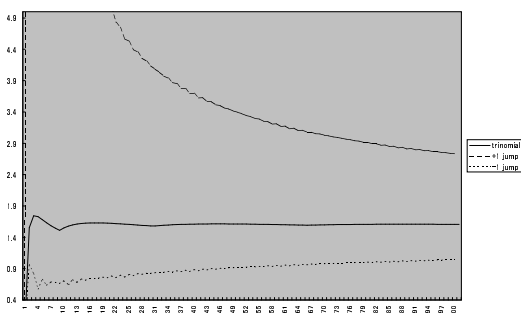


図 4 ジャンプモデル