モンテカルロ法によるアメリカンオプションの評価

2001MM028 神戸 亮

指導教員　國田 寛

1　はじめに

モンテカルロ法とは, 乱数などの偶発的な確率変数を用いて試行錯誤的に問題を解いていく数値計算のことである.
これまで, アメリカンオプションの価格評価は有限差分法あるいはツリー法で求められるのが一般的であった. ところが最近になって, アメリカン・オプションの価格をモンテカルロ法により算出する方法がいくつか提唱されてきている. 本論文では, これらのうちバックワード・サーチ法により, アメリカン・オプションの価格を評価し, 従来の解法である二項モデル, 有限差分法の陽解法, 陰解法と比較した.

2　モンテカルロ法における株式のコールオプション評価

まず, 原資産, この場合は株価の確率的な変動過程を考える. 例えば, 株価 (S_t) は幾何ブラウン運動に従うとすると,

$$d\tilde{S}_t = \mu\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t d\tilde{W}_t \tag{1}$$

次にリスク中立的な評価を行うために、(1) を危険中立的な株価の確率過程に変換する。

$$d\tilde{S}_t = \gamma_d\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t d\tilde{W}_t \tag{2}$$

これを離散化して

$$\tilde{S}(t+\Delta t) = \tilde{S}(t) + \gamma_d\tilde{S}(t)\Delta t + \sigma\tilde{S}(t)\tilde{\varepsilon}\sqrt{\Delta t} \tag{3}$$

オプション価値は, 平均値の現在価値を計算することによって得られる. 添字 j を j 回目のパスの発生とし,n 個のパスを発生したとすると,

$$C = e^{-\gamma dT}E[\tilde{C}_T] \approx e^{-\gamma dT}\frac{\sum_{j=1}^{n} C_{j,T}}{n} \tag{4}$$

γ_d は無リスク資産の投資収益率である.

3　停止時刻型モンテカルロ法

停止時刻型モンテカルロ法とは, 停止時刻 τ において 1 つのパスを終了させ,τ 時点でペイオフを確定させるモンテカルロ法のことである. 停止時刻 τ におけるペイオフを $h(\tau)$ とすると,τ を確率変数と考えて

$$E[e^{-\gamma\tau}h(\tau)1_{\{\tau<T\}}] + E[e^{-\gamma T}h(T)1_{\{\tau>T\}}] \tag{5}$$

によりオプション評価を算出する. ただし定義関数 $1_{\{\tau<T\}}$ は $\tau < T$ ならば 1, それ以外のときは 0 になる.

一般にアメリカン・プット・オプションを時点 t において行使するかどうかは, 早期行使する場合の価値 e(t,S(t)) と持ち越す場合の価値 V(t,S(t)) の差額

$$d(t,S(t)) = e(t,S(t)) - V(t,S(t)) \tag{6}$$

を用いた最適行使基準

$$\begin{cases} d(t,S(t)) \geq 0 \Leftrightarrow \text{早期行使が最適} \\ d(t,S(t)) < 0 \Leftrightarrow \text{持ち越しが最適} \end{cases} \tag{7}$$

により判断される. ただし, アメリカン・プット・オプションの場合, 最適行使境界 $S^*(t)$ が存在することがわかっており, 仮に $S^*(t)$ を特定できたとすれば, 一般的な最適行使基準 (6) は最適行使境界を用いる最適行使基準

$$\begin{cases} S(t) \leq S^*(t) \Leftrightarrow \text{早期行使が最適} \\ S(t) > S^*(t) \Leftrightarrow \text{持ち越しが最適} \end{cases} \tag{8}$$

に置き換えることができる.

4　バックワード・サーチ法

時点 0 から満期 T までを離散化し, 時点 t_j における株価を

$$S_j, j = 0,...,M \tag{9}$$

とする. また, 時点 t_j における株価をグリッド

$$0 < S_j^1 < \cdots < S_j^g < \cdots < S_j^G < \infty \tag{10}$$

に分ける.
まず, 満期 t_M では行使価格 K が最適行使境界の値である.
次に, 満期直前の t_{M-1} における最適行使境界の値 S^*_{M-1} を決定する方法を述べる. 今, 時点 t_{M-1}, 株価 S^g_{M-1} における早期行使価値と持ち越し価値の差を $d(S^g_{M-1})$ とすると

$$d(S^g_{M-1}) = max[K - S^g_{M-1}, 0] - e^{-\gamma(\Delta t)}E_{M-1}[P_M|S^g_{M-1}] \tag{11}$$

$$P_M(S_M) = max[K - S_M, 0] \tag{12}$$

のように書ける. また, アメリカン・プット・オプションについては,

$$\begin{cases} d(S_{M-1}) \geq 0 \Leftrightarrow S_{M-1} < S^*_{M-1} \Leftrightarrow \text{早期行使が最適} \\ d(S_{M-1}) < 0 \Leftrightarrow S_{M-1} > S^*_{M-1} \Leftrightarrow \text{持ち越しが最適} \end{cases} \tag{13}$$

が成立するような, 最適行使境界の値 S^*_{M-1} が存在することがわかっている. このとき持ち越し価値

$E_{M-1}[P_M|S_{M-1}=S^g_{M-1}]$ は状態 (t_{M-1},S^g_{M-1}) からスタートする単純なモンテカルロ法により求めればよい.

さらに時点 t_{M-2} における最適行使境界の値 S^*_{M-2} を決定する方法を述べる. このとき,S^*_{M-1} はすでに求まってこれを利用すると,

$$d(S^g_{M-2})=max[K-S^g_{M-2},0]-e^{-\gamma\Delta t}E_{tM-2}[P_{M-1}|S^g_{M-2}] \tag{14}$$

$$P_{M-1}(S_{M-1})=\begin{cases} e^{-\gamma\Delta t}P_M(S_M), S_{M-1}\geq S^*_{M-1} \\ K-S_{M-1}, S_{M-1}<S^*_{M-1} \end{cases} \tag{15}$$

として

$$\begin{cases} d(S_{M-2})\geq 0 \Leftrightarrow S_{M-2}<S^*_{M-2} \Leftrightarrow \text{早期行使が最適} \\ d(S_{M-2})<0 \Leftrightarrow S_{M-2}>S^*_{M-2} \Leftrightarrow \text{持ち越しが最適} \end{cases} \tag{16}$$

が成立する. このとき, 各グリッド S^g_{M-2} における持ち越し価値

$$E_{M-2}[P_{M-1}|S^g_{M-2}] \tag{17}$$

は状態 (t_{M-2},S^g_{M-2}) からスタートする 2 期間の停止時刻型モンテカルロ法により算出する. また, 時点 $t_1,...,t_{M-2}$ については, 時点 t_{M-1} と同様の操作を後進的に時点 t_0 まで繰り返す. これにより最適行使境界 S^*_j(j=0,...,M) を定めることができる.

5 解析結果

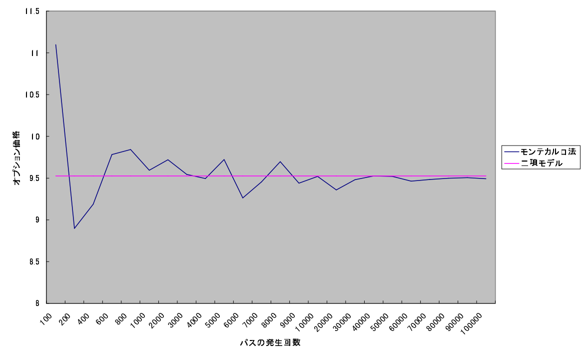
S=100,K=100,T=1, 時間の分割数 250, 原資産の数 40(陽解法, 陰解法), パスの数 1000(モンテカルロ法) の時,σ と r の値を変動させてそれぞれの解法のアメリカン・プット・オプションの価格を求めた.

σ	r	二項モデル	陽解法	陰解法	モンテカルロ法
0.2	0.06	5.795876	5.733859	5.723996	5.628171
0.25	0.06	7.652431	7.606624	7.593459	7.598944
0.3	0.06	9.525828	9.492500	9.476028	9.482050
0.35	0.06	11.406340	11.382914	11.362760	11.910860
0.4	0.06	13.288103	13.271110	13.246081	12.506324
0.3	0.02	11.005501	10.976018	10.959704	10.606265
0.3	0.04	10.222511	10.191170	10.174170	10.304891
0.3	0.06	9.525828	9.492500	9.476028	9.887279
0.3	0.08	8.899503	8.867047	8.851426	8.893734
0.3	0.1	8.333084	8.294447	8.280126	8.263682

表 1　アメリカン・プット・オプション

表 1 より, モンテカルロ法は, 他の手法に比べて, オプション価格の値にちらつきがみられる. その原因として, モンテカルロ法は乱数を用いているからだと考えられる. 次に, モンテカルロ法のパスの数を 100 から 100000 まで増加させた時のオプション価格の変動を示すと次のようになる.

この時 σ=0.3,r=0.06 で求めた.



この時, 二項モデルの値は,9.525828 である. ちなみに, 陽解法は 9.492500 である. 陰解法は 9.476028 である. 分割数が 1000 の時のモンテカルロ法の値は表 1 より,9.482050, 又は,9.887279 である.

分割数は大体 50000 を越えたあたりから, 値が安定していくことが分かった. 分割数が 100000 の時のモンテカルロ法のオプション価格は,9.492065 であった.

6 おわりに

アメリカン・プット・オプションを, 二項モデル, 有限差分法の陽解法, 陰解法, モンテカルロ法のバックワードサーチ法により, 価格評価を行ってきた.σ と r 値を変動させ, それぞれの値と比較した.σ が増加すると, オプション価格も増加する.r が増加すると, オプション価格は減少する. どのモデルも, 大体近い値をとっていたが, モンテカルロ法に限っては精度を上げさせる為にパスの数を増やす必要があった. しかし, パスの数を増やすと, 計算時間が長くなるという, 欠点が生じる.

7 謝辞

本研究を進めるにあたり,2 年間熱心に御指導くださり, また多大な助言をいただいた南山大学数理情報学部数理科学科の國田寛教授と, ご協力いただいた諸先輩方また, お互いに支え合うことのできた皆様に深く感謝致します.

参考文献

[1] 森平爽一朗・小島裕：コンピュテーショナル・ファイナンス, 朝倉書店 (1997).

[2] 湯前祥二・鈴木輝好：モンテカルロ法の金融工学への応用, 朝倉書店 (2000).

[3] 伊藤幹夫・戸瀬信之：デリバティブの数学入門, 共立出版株式会社 (2002).