ファイナンスへの計量分析

2000MM008 花井 司

指導教員　國田 寛

1　はじめに

株価や為替はそれらを取り巻く経済環境の動向から、極めて複雑な不確実性を伴った構造を持っている。これらを分析する方法は様々なアプローチがあるが、私は統計的手法を駆使して多次元的な変動構造をモデルとして把握し、その構造から将来の変動を予測する分析を行う。

2　回帰モデル

市場全体の収益率 x、個別の収益率 y、誤差項 u とすると、

$$y_t = \alpha + \beta \ x_t + u_t$$

と表現できる。誤差項 u_t は
(U1) 平均 0、分散 $\sigma^2(>0)$ であり、互いに無相関な系列
(U2) 各 t について u_t と $x_{t-k}(k=1,2,\cdots)$ は独立
という仮定を満たすものである。ここで現れる α、β は未知のパラメータである。s_{xx} を x の 分散、s_{xy} を x と y の共分散とすると、もし $s_{xx}>0$ ならば、これらの最小 2 乗推定値は、

$$\begin{cases} \alpha = \bar{\mathrm{y}} - \beta \ \bar{\mathrm{x}} \\ \beta = s_{xy}/s_{xx} \end{cases} \tag{1}$$

となる。また、回帰モデル説明力は、

$$R^2 = 1 - \frac{s_{\hat{u}\hat{u}}}{s_{yy}}$$

の値によって評価できる。R^2 を決定係数という。$s_{\hat{u}\hat{u}}$ は s_{yy} より大きくなることはないから、R^2 は必ず 0 と 1 の間にある。決定係数が大きいほど、回帰モデルの説明力は大きい。

2.1　実際の分析

実際に 2004 年 11 月 1 日から 30 日 (土日祝日は除く) までの日経平均株価とトヨタ自動車の株価のデータについて、(当日-前日)/前日× 100、前日が土日祝ならばその前のデータ、とした収益率で、実際に α、β を算出すると、

$$\begin{cases} \alpha = -0.376457 \\ \beta = 0.783235 \end{cases} \tag{2}$$

となる。図 1 は日経平均株価とトヨタ自動車の散布図と回帰直線を示したグラフである。これらからわかることは、R^2=0.437191 ということから信頼性としては、あまり高くない。だが、実際に図 1 を見てみると、大きく外れている数値はあるものの、大半は回帰直線の周りに集まっている。これらから言えることは、トヨタ自動車の株価の収益率は大抵は日経平均株価の収益率に影響されているが、時々全く影響されていない数値が現れることがわかる。

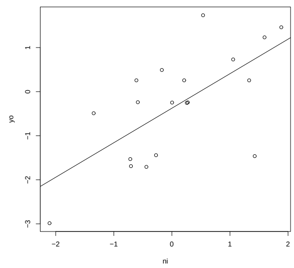

図 1　トヨタ自動車と日経平均の収益率の散布図および回帰直線

3　時系列モデル

時間の推移と共に観測された観測値の集まりを時系列データと呼ぶ。時系列データ $\{y_t\}$ は

$$y_t = m_t + x_t$$

と表現できる。ここで m_t は時間 t の関数であり、y_t の長期的な傾向や毎シーズン必ず起こる周期的変動を表す。また、x_t は y_t から確定的な変動 m_t を除いた部分であり、不規則な確立変動を表す。最も単純なモデルでは、x_t は i.i.d(独立・同一分布) であると仮定される。金融データの場合、x_t はより広く定常過程であると仮定されることが多い。ここで、定常過程とは $E[{x_t}^2]$ が存在し、
(1) 平均が一定：すべての t に対して $E[x_t]=\mu$
(2) 分散が一定：すべての t に対して $Var=\gamma\ (0)$
(3) 自己共分散が一定：すべての t および k に対して $Cov(x_t, x_{t-k})=\gamma\ (k)$
となる確率過程を意味する。

3.1　ARMA モデル

定常過程を推定するためには、平均や分散に加えて (無限個の) 自己相関を求めなければならない。そこで、自己回帰モデルと移動平均モデルの組合せである ARMA モデルを用いると、有限個のパラメータによってすべての自己相関を定めることができる。ARMA モデルは、

$$x_t = \mu' + \sum_{i=1}^{p} \phi_i x_{t-i} + u_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i u_{t-i} \qquad (3)$$

と表現でき、ARMA(p,q) と書く。

3.2 ARMA モデルの推定

回帰モデルの場合と同様に、最小 2 乗法によってパラメータを推定する。誤差項の 2 乗和を最小にするように μ', ϕ_i、θ_i を定めればよい。実際には、$x_0,x_{-1},\cdots,x_{-p+1};u_0,u_{-1},\cdots,u_{p-q+1}$ を 0 と置き、t=p+1 からスタートする。つまり、

$$\tilde{u_{p+1}} = x_{p+1} - \mu' - \phi_1 x_p - \cdots - \phi_p x_1$$
$$\tilde{u_{p+2}} = x_{p+2} - \mu' - \phi_1 x_{p+1} - \cdots - \phi_p x_2 - \theta_1 u_{p+1}$$
$$\vdots$$
$$\tilde{u_T} = x_{T+1} - \mu' - \phi_1 x_{T-1} - \cdots - \phi_p x_{T-p} - \theta_1 u_{T-1} - \cdots - \theta_p u_{T-p}$$

とするとき、

$$\sum_{t=p+1}^{T} \tilde{u_t}^2$$

を最少化する方法である。

3.3 ARMA モデルの同定

データから p と q の値を定めることを ARMA モデルの同定という。最適な同定の基準として、AIC によるモデル選択の方法が用いられる。AIC は、

$$\log \sigma^2 + (p+q)(2/T)$$

という量に基づく。ただし、σ^2 はあてはめたモデルの誤差項の分散の推定値である。$-\log \hat{\sigma}^2$ は (最大化) 尤度に対応し、データとのあてはまりの良さを表す。後半の $(p+q)(2/T)$ はモデルの複雑さに対応した項である。いくつかの (p,q) の組合せに対して、上の量を計算し、最小となる p、q を選択する。

3.4 実際の分析

為替レートは、それ自身が定常であるとみなすことが多い。2003 年 1 月末〜12 月末の対ドル円レートを実際に ARMA モデルをフィットさせてみる。モデルを同定するためにいくつかの次数の組合せに対して ARMA モデルの AIC を計算する。AIC が最も小さい次数が (1,1) であることから、最も相応しいモデルは ARMA(1,1) となる。このモデルは、

$$\hat{x_t} = 115.58 + 0.918 \cdot x_{t-1} + u_t - 0.8246 \cdot u_{t-1}$$
$$(R^2 = 0.8430)$$

と推定される。

表 1 について円レートの欄は実際のデータ、推定値は、

$$\hat{x_t} = 115.58 + 0.918 \cdot x_{t-1} - 0.8246 \cdot u_{t-1} \qquad (4)$$

を、誤差は (実際のデータ)-(推定値) を計算したものである。

円レート	推定値	誤差
119.21	117.88	1.63
117.75	118.53	-0.78
119.02	116.85	2.17
119.46	119.69	-0.23
118.63	118.29	0.34
119.82	118.10	1.71
120.11	120.12	-0.01
117.13	118.95	-1.82
110.48	115.09	-4.61
108.99	107.54	1.45
109.34	111.30	-1.96
106.97	108.78	-1.81

表 1　2003 年 1 月末〜12 月末の円レートのデータ

これらのデータからわかることは、決定係数が 0.8430 であることから、このモデルは非常に信頼できると考えられる。実際に 2003 年においては大きな誤差はない。しかし、このモデルで 2004 年を推定したときの値と実際のデータの誤差は単調に負に増加している。結論としては、2004 年に円の価値が上昇したことが原因となっている。統計的手法では経済情勢は全く考えないので、このような開きまではモデル化は難しいと言える。しかしながら、7ヵ月目までは時々大きな開きは出るものの、ある程度の予測はできることがわかる。

4 おわりに

定常過程であると仮定したうえで理論を進めてきた ARMA モデルだが、金融時系列データにおいては分布の非正規性、非定常性が観測される。特に系列の分散が急激に変化することがあり、ARMA モデルではこのような現象を十分に説明できない。そのために自己回帰和分移動平均モデル、自己回帰条件付分散不均一モデルなどが存在する。本論文が今後これらを研究する人への参考になれば幸いである。

5 謝辞

本論文を完成するにあたり、御指導いただきました國田寛教授をはじめ、有益な助言をして頂いた石原氏、伊藤氏には心から感謝致します。

参考文献

[1] 小暮厚之：ファイナンスへの計量分析, 朝倉書店, (1996.12).

[2] 竹村彰通、刈屋武昭、矢島美寛、田中勝人、竹内啓：経済時系列の統計, 岩波書店, (2003.2).

[3] infoseek: http://money.www.infoseek.co.jp,

[4] 日本銀行: http://www.boj.or.jp,