チェビシェフ級数展開による常微分方程式の解法

2000MM075 太田 直樹

指導教員　鳥居 達生

1　はじめに

本研究では, まず関数のチェビシェフ級数展開から始まり, これをもとに常微分方程式の解法について述べる. フーリエ · チェビシェフ係数は積分で表わされる. それを変数変換後の台形公式で近似する. このときチェビシェフ級数の和を求めるのにクレンショウの算法が使われる. 一旦, 関数をチェビシェフ級数展開すれば, その項別積分は簡単である [1][2][3]. このことを利用して常微分方程式の初期値問題をピカールの逐次近似法 [4] によって解き, 解をチェビシェフ級数の形に表し, その時の展開係数を出力させるプログラムを作成する.

2　関数のチェビシェフ級数展開と項別積分

2.1　チェビシェフ級数展開

k 次のチェビシェフ多項式は

$T_k(t) = \cos k\theta$, $x = cos\theta$ で定義される.

区間 $[-1,1]$ 上の滑らかな関数 f(t) において

$t = \cos\theta$ と変数変換すれば, f($\cos\theta$) はフーリエ余弦級数に展開できる.

f($\cos\theta$) $= a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + ...$

変数を元に戻せば

f(t) $=a_0T_0(t) + a_1T_1(t) + a_2T_2(t) + ...$.

となる. これが f(t) のチェビシェフ級数展開である.

次にフーリエ係数 a_k の決め方である. ここで三角関数の直交性を用いる.

f($\cos\theta$) は θ について周期 2π の偶関数であるので

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta d\theta \\ a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos\theta)d\theta. \end{cases}$$

フーリエ係数 a_k の積分を区間 $[0,\pi]$ を n 等分して台形公式を適用する.

$a_k^{(n)} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n}{}'' f(\cos\frac{\pi}{n}j)(\cos\frac{\pi}{n}kj)$.

ここで $\sum''$ は台形公式の計算上の都合より初項と末項を $\frac{1}{2}$ 倍にして和をとることを意味する.

$\displaystyle\sum_{j=0}^{n}{}'' f(\cos\frac{\pi}{n}j)\cos(\frac{\pi k}{n})j$ を級数として, この和はクレンショウの算法で簡単に求まる.

2.2　任意区間の級数展開

f(x) の定義区間 $[a\ ,b]$ を $[-1,1]$ に写す一次変換は,

$x = \dfrac{2}{b-a}(t-1)+b$ であるから, $[a,b]$ 上のチェビシェフ級数展開は

$$\mathrm{f(x)} \cong \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k\left(\frac{2}{b-a}(x-a)-1\right)$$

となる. これで任意区間のチェビシェフ級数展開が導かれた.

2.3　項別積分

上記の級数の不定積分は次のようにしてできる.

$$\int_a^x \sum a_k T_k\left(\frac{2}{b-a}(x-a)-1\right) \mathrm{dx}$$

$x = \dfrac{2}{b-a}(t-1) + \mathrm{b}$ と変数変換すると,

$$\int_{-1}^{t} f\left(\frac{b-a}{2}(t-1)+b\right)\cdot\frac{b-a}{2}\ \mathrm{dt}$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{t}\sum a_k T_k(t)\ \mathrm{dt}$$

$$=\frac{b-a}{2}\left[\sum b_k T_k(t)\right]_{-1}^{t}$$

と置けば次の関係式が成り立つ.

$b_k = \dfrac{a_{k+1} - a_{k+1}}{2\cdot k}$, k=1 ,2 , ... , n+1

ただし, $a_{n+1} = a_{n+2} = 0$.

3　常微分方程式の初期値問題の反復解法

3.1　ピカールの逐次近似法

微分方程式の初期値問題の一つの解法であるピカールの逐次近似法について説明する.

$y'=$ f(x, $y(x)$) , 初期値 $y(a)= y_0$ が与えられている.

これをまとめて積分表示すると

$y = y_0 + \displaystyle\int_a^x$ f(t, $y(t)$)dt .

この反復法は

y_{k+1}(x) $= y_0 + \displaystyle\int_0^x$ f(t ,y_k(t)) dt , k=0,1,2... であって極限 $y(t)$ が解である. その解を有限項のチェビシェフ級数で近似したい. そこで今, $y_k(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} T_j$(t) として, これを反復させる. 最終的にはチェビシェフ展開係数が求まる. y_0(x) $= y_0 = a_0^{(0)}T_0(x)$ を初期値としてチェビシェフ展開係数に関して反復計算する. すなわち

$a_j^{(k)}$, $0 \le j \le n \Rightarrow a_j^{(k+1)}$, $0 \le j \le n$.

3.2　プログラムの作成

プログラムは大別して 4 つの関数で構成されている [5][6].

1. **関数** `df` ...（**微分方程式の右辺の関数**）
2. **関数** `e_cheb` ...（**チェビシェフ級数の求和**）
3. **関数** `integral` ...（**チェビシェフ級数の項別積分**）
4. **関数** `cheb_s` ...（**チェビシェフ級数展開**）

これらの関数プログラムを主プログラムで制御する.

4　連立常微分方程式の解法について

4.1　連立常微分方程式の解法

今までは未知関数 1 個の常微分方程式を y'=f(x,y) 取り扱ってきたが, ここでは未知関数が m 個の場合, すなわち連立常微分方程式の解法を考える.

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ \vdots \\ f_m(x,y) \end{pmatrix}, \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0$$

これを積分形に直し. 前述した逐次近似法を適用する.

$$\mathbf{y}_{new}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_a^x \mathbf{f}(\mathrm{t}, \mathbf{y}_{old}(t))\ \mathrm{dt}\ , (a \le x \le b)$$

$\mathbf{y}_{old}(t)$ は既知のチェビシェフ級数であり, $\mathbf{y}_{new}$ が更新された近似解である.

$$\left.\begin{array}{l} y_1old = \sum_{j=0}^{n} a_{1j}^{(old)} T_j(t) \\ y_2old = \sum_{j=0}^{n} a_{2j}^{(old)} T_j(t) \\ \quad\vdots \\ y_mold = \sum_{j=0}^{n} a_{mj}^{(old)} T_j(t) \end{array}\right\} \mathbf{y}_{old} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}_j^{(old)} T_j(t)$$

と置き, ベクトル列 $\{\mathbf{a}^k\}$ が生成される. この極限ベクトルが解 $y(t)$ のチェビシェフ級数を与える.

4.2　プログラムの作成

例として, 2 階線形微分方程式 y''+ y =0 を 1 階連立微分方程式に変形して, 微分方程式の解をチェビシェフ級数に表現して, 展開係数を出力させるプログラムを考える.

1 階連立微分方程式へ変換する

y'= z と置く. 微分すると y''= z' になるので,

$$y'' = -\mathrm{y} = z' \text{ が成立.}$$

与えられた 2 階微分方程式は 1 階連立 2 元微分方程式となる.

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = z \\ z' = -y. \end{array} \right.$$

区間 [0 , π], 初期値 $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, チェビシェフ級数の次数 n=10 としたときの実行結果を示す.

標本点	近似解	正解（cosx）
0.000000	1.000000	1.000000
0.523599	0.866024	0.866023
1.047198	0.499999	0.500000
1.570796	-0.000002	-0.000000
2.094395	-0.500015	-0.500000
2.617994	-0.866233	-0.866023
3.141593	-1.001827	-1.000000

高階の線形微分方程式も同様にして 1 階の連立微分方程式に変換できる. 微分方程式の右辺の関数は, 問題ごとにプログラムを作らなければならない. さらに積分区間と初期値を与えると自動的に解は出力される. また本章と 3 章のプログラムの相違点は主プログラムの簡略化である. 3 章では微分方程式の初期化や反復計算はすべて主プログラムで計算されていたが, それを新たに別の微分方程式を解く関数 (C 言語) にして一つにまとめた. プログラム上では (ODE2). この関数を主プログラムの中で機能させればよい. また, 近似解と真値をチェックするための検算も主プログラムの中に入れた. 2 章で述べてきた理論を連立微分方程式に一般化しプログラムを作成した. 今, y という関数は単独ではなくて 1 つのベクトルとして表されている. 未知関数が m 個だから, そこの部分を注意して考えてプログラムを作成してきた.

作成したプログラムの主要な部分は 5 つある [5][6].

1. **関数** `df2...`**（微分方程式の右辺の関数）**
2. **関数** `echeb_2...`**（チェビシェフ級数の求和）**
3. **関数** `integral...`**（チェビシェフ級数の項別積分）**
4. **関数** `cheb2_s...`**（チェビシェフ級数展開）**
5. **関数** `ODE2...` **（連立微分方程式の初期化，逐次近似法による反復計算）**

5　おわりに

本研究にあたり, 私は微分方程式を解く数値計算をプログラムしてきたが, 数学の理論は勿論, プログラミングの能力が大部養われてきたように思う. 今までは手計算を中心に数学を勉強をしてきたので, プログラムを組むことによってさらに理論の理解が深まった.
私が解いた微分方程式の解は比較的簡単なものなので, もっと複雑な微分方程式に挑戦することは今後の課題である.

参考文献

[1] 杉浦 洋 著, 数値計算の基礎と応用,(1997)
[2] 阪井 章 著, 応用解析 複素解析, フーリエ解析,(1992)
[3] 森 正武 著, 数値解析法,(1984)
[4] 柳田英二, 栄伸一郎 著, 常微分方程式論,(2002)
[5] 森口 繁一, 伊達正夫, 武市正人 著, C による算法通論,(1992)
[6] 岡田 稔 著, C によるプログラム演習