関数のチェビシェフ級数展開とその数値積分法への応用

2000MM072 新井 智子

指導教員　 鳥居 達生

1　はじめに

滑らかな関数 $f(x)$ をチェビシェフ級数に展開する. そのため, チェビシェフ展開係数の積分表示を台形公式と中点公式を用いて近似し, それぞれに対しクレンショウの算法で効率的 (計算量の節減) に求める. 所要の精度 $\epsilon > 0$ に応じ, 展開項数を自動的に決定し, 展開係数を求める. 得られたチェビシェフ級数は簡単に積分できる. このことを利用して定積分の計算を行う [1][2][3].

2　チェビシェフ級数展開

滑らかな関数 $f(x)$, $-1 \le x \le 1$ において $x = \cos\theta$ と変数変換すれば $f(\cos\theta)$ はフーリエコサイン級数

$$f(\cos\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \cdots$$

と表される. k 次のチェビシェフ多項式 $T_k(x)$ は, $T_k(x) = \cos k\theta, x = \cos\theta$ で定義される. 変数 θ を x にもどせば $f(x)$ のチェビシェフ級数展開が得られる.

$$f(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + \cdots \qquad (1)$$

チェビシェフ級数の展開係数 a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ は

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos k\theta\, d\theta \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \qquad (2)$$

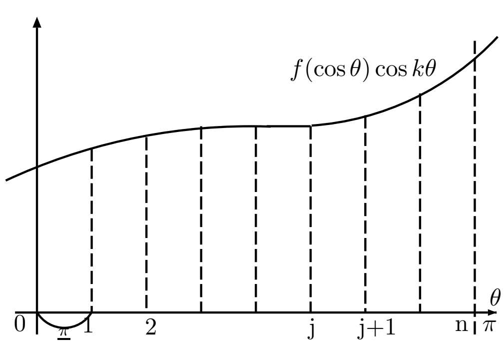
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\theta)\, d\theta \quad (k = 0) \qquad (3)$$

となる [3].

3　台形公式による関数のチェビシェフ級数展開

3.1　台形公式によるチェビシェフ展開係数

(2) 式の $\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos k\theta\, d\theta$ を台形公式を用いて計算する. $\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos k\theta\, d\theta$ の区間 $(0 \le \theta \le \pi)$ を n 等分する. θ 軸上の n 等分された点の番号を $0, 1, 2, \cdots, n$



とする. n 等分された小区間の幅は $\frac{\pi}{n}$ である.θ 軸上の j 点, $(j+1)$ 点の座標は $(\frac{\pi}{n}j,\ 0)$, $\left(\frac{\pi}{n}(j+1),\ 0\right)$ である.

$\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos k\theta\, d\theta$ を台形公式を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n-1} \ \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\Big(f(\cos\tfrac{\pi}{n}j)\cos\tfrac{\pi}{n}kj \\ &\qquad +f(\cos\tfrac{\pi}{n}(j+1))\cos\tfrac{\pi}{n}k(j+1)\Big) \\ &\quad = \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n}{}''\ f(\cos\tfrac{\pi}{n}j)\cos\tfrac{\pi}{n}kj\end{aligned}$$

のように計算できる. ただし台形公式による和を求める都合上

$$\sum_{j=0}^{n}{}''\ a_j = \frac{1}{2}a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n$$

とする. チェビシェフ展開係数 $a_k^{(n)}$ は (2) 式より

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n}{}''\ f(\cos\tfrac{\pi}{n}j)\cos\tfrac{\pi}{n}kj \qquad (4)$$

3.2　台形公式のためのクレンショウの算法

$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cos\theta$ の値が与えられたとき以下のクレンショウの算法によって $S = \sum_{k=0}^{n} a_k\cos k\theta$ を求めることができる.

$$\begin{aligned}&b_{n+1} = 0,\ b_n = a_n \\ &b_k = 2b_{k+1}\cos\theta - b_{k+2} + a_k \\ &\qquad k = n-1, n-2, \cdots, 0\end{aligned}$$

$b_1,\ b_0$ の値から

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=0}^{n} a_k\cos k\theta \\ &= b_0 - b_1\cos\theta \qquad (5)\end{aligned}$$

チェビシェフ展開係数 $a_k^{(n)}$ を求める式 (4) はクレンショウの算法 (5) で求める [1].

4　中点公式による関数のチェビシェフ級数展開

4.1　中点公式によるチェビシェフ展開係数

(2) 式の $\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos k\theta\ \ d\theta$ について中点公式を用いて計算する. 台形公式の場合と同様に $\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos k\theta\, d\theta$ の区間 $(0 \le \theta \le \pi)$ を n 等分する. n 等分された θ 軸上の隣り合う点の中点は $\frac{\pi}{n}(j+\frac{1}{2})$ である. $\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos k\theta\ d\theta$ を中点公式を用いて計算すると

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos k\theta\ d\theta \\ &\quad = \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\cos\tfrac{\pi}{n}(j+\tfrac{1}{2}))\cos\tfrac{\pi}{n}k(j+\tfrac{1}{2}) \qquad (6)\end{aligned}$$

中点公式を用いてチェビシェフ展開係数を求めたものを $b_k^{(n)}$ とすると

$$b_k^{(n)} = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\cos\tfrac{\pi}{n}(j+\tfrac{1}{2}))\cos\tfrac{\pi}{n}k(j+\tfrac{1}{2}) \qquad (7)$$

となる.

(7) 式を求めるため次の級数和について考える.

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} a_j\cos(j+\tfrac{1}{2})\theta \qquad (8)$$

級数和 S は次の漸化式によって求めることができる.

$$b_n = 0, \quad b_{n-1} = a_{n-1}$$
$$b_{k-1} = 2b_k \cos\theta - b_{k+1} + a_{k-1}$$
$$k = n-1, n-2, \cdots, 1$$
$$S = \cos\frac{\theta}{2}(b_0 - b_1).$$

(7) 式の和の計算は, 上の漸化式を用いると簡単である.

5 自動積分法

5.1 チェビシェフ級数の項別積分

関数 $f(x)$ のチェビシェフ級数 (1) 式の積分は

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-1}^{1} T_k(x) dx \qquad (9)$$

である. (9) 式の $\int_{-1}^{1} T_k(x)dx$ は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} T_k(x)dx &= \int_{\pi}^{0} \cos k\theta(-\sin\theta d\theta) \\ &= \tfrac{1+(-1)^k}{1-k^2}.\end{aligned}$$

$\int_{-1}^{1} T_k(x)dx$ について k が偶数の場合, 奇数の場合に分けて計算すると

$$\int_{-1}^{1} T_{2k}(x)\ dx \ = \ \tfrac{2}{1-4k^2}, \quad \int_{-1}^{1} T_{2k+1}(x)\ dx \ = \ 0$$

となる.
関数 $f(x)$ のチェビシェフ級数の積分は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\ dx &= \ \sum_{k=0}^{\infty} \ a_k \int_{-1}^{1} T_k(x)\ dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \ a_{2k} \left(\tfrac{2}{1-4k^2}\right)\end{aligned} \qquad (10)$$

によって求めることができる.

5.2 台形公式と中点公式によるチェビシェフ係数の関係

3.1 節のように $\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta\ d\theta$ の区間 $[0, \pi]$ を n 等分し台形公式を用いて求めたチェビシェフ展開係数を $a_k^{(n)}$, 4.1 節のように $\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta\ d\theta$ の区間 $[0, \pi]$ を n 等分し中点公式を用いて求めたチェビシェフ展開係数を $b_k^{(n)}$ とすると次の関係が成立する.

$k = 0, 1, 2, \cdots$ について

$$a_k^{(2n)} = \tfrac{1}{2}(a_k^{(n)} + b_k^{(n)}) \qquad (11)$$
$$a_{2n-k}^{(2n)} = \tfrac{1}{2}(a_k^{(n)} - b_k^{(n)}) \qquad (12)$$

$a_k^{(1)}$ を初期値として与えれば中点公式によるチェビシェフ展開係数 $b_k^{(1)}$ を用いて $a_k^{(2)}$ を求めることができる. 求めた $a_k^{(2)}$ と中点公式によるチェビシェフ展開係数 $b_k^{(2)}$ から $a_k^{(4)}$ を求める. $a_k^{(n)}$, $b_k^{(n)}$ から台形公式によるチェビシェフ展開係数 $a_k^{(2n)}$ を求めることができる. $\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta\ d\theta$ において区間 $[\ 0, \pi\ ]$ を順に半分半分に細分しながら, 台形公式によるチェビシェフ展開係数を求める. 初期値 $a_k^{(1)}$ を与えれば、台形公式によるチェビシェフ展開係数は (11),(12) 式で求めることができるので中点公式によるチェビシェフ展開係数 $b_k^{(n)}$ だけが必要である. したがって展開項数は倍々に増えていくことになる. チェビシェフ級数の誤差は末尾の項の積分の絶対値で推定できるので, 所要の精度 ϵ が与えられたとき, 次の式を満たすまで

$$\left|\tfrac{2}{1-n^2} a_n\right| \ < \ \epsilon.$$

(11),(12) 式を反復して計算する. これによって所要の精度に応じて自動的に展開次数を定めることができる.

6 実行例

$f(x) = e^x$ $[\ 0,\ 1\ ]$ のチェビシェフ展開係数 a_k, チェビシェフ級数の積分について実験した結果を以下に示す [4][5].

展開係数 a[k]		関数 f(x) の積分
a[0]	1.753388	1.718282
a[1]	0.850391	
a[2]	0.105209	**チェビシェフ級数の積分**
a[3]	0.008722	
a[4]	0.000543	1.718282
a[5]	0.000027	
a[6]	0.000001	
a[7]	0.000000	
a[8]	0.000000	

7 おわりに

5.2 節のように台形公式, 中点公式の相互関係を用いて関数 $f(x)$ をチェビシェフ級数展開すると, より精度よく関数 $f(x)$ を近似できることが分かった. 求めたい精度を満たすまでチェビシェフ級数の項を倍々に増やし関数 $f(x)$ に収束するようにできる. これを項別積分することによって任意の滑らかな関数の定積分ができる.

参考文献

[1] 森 正武：数値解析, 共立数学講座 12, 共立出版株式会社, (1973)

[2] 杉浦 洋：数値計算の基礎と応用 -数値解析学への入門-, 新情報ライブラリ M-11, サイエンス社, (1997)

[3] 阪井 章：応用解析 複素解析/フーリエ解析, 共立出版株式会社, (1992)

[4] 浦 昭二, 原田 賢一：C 入門, 電子計算機のプログラミング= 11, 培風館, (1994)

[5] 日比野 勧, 長谷川 武光, 二宮 市三, 細田 洋介, 佐藤 義雄：二宮法と FLR 法の結合による新しい適応型積分法, 情報処理学会論文誌,Vol.44, pp.2419-2427 (2003)