最適レギュレータによる倒立振子の安定化

2000MM023 石川　直美　　2000MM065　根村　佳

指導教員　高見勲

1.　はじめに

倒立振子モデル５０５を最適レギュレータによる状態フィードバックを行い、安定化を図る。また、応答改善を通して、速やかで且オーバーシュートを目標の範囲内におさめるような制御を行う。
制御技術はロボットの複雑な位置決め操作を可能にしている。このようなサーボ系の技術を研究するための実験として、不安定な構造をもつ倒立振子を安定化し、位置制御を行う。倒立振子は、扱いやすく、結果も比較的早く得ることができるので、このような実験の対象として適したものであるといえる。

２. 制御対象

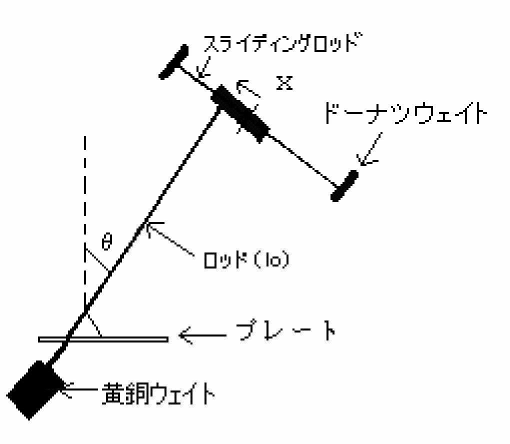

図１．制御対象の各名称とパラメータの位置

制御対象はＤＣサーボモーター、高分解能エンコーダ、低摩擦スライディングバランスロッド（腕部分）、調整可能な底部の重り（黄銅ウェイト）から成っている倒立振子である。エンコーダでロッドの角度およびスライディングロッドの長さを計測できるので、それをもとに制御を行う。

必要なパラメータを以下のように定める。
l_o(m) ：支点からのロッドの長さ
m_1：ロッド全体の質量
m_{1o}(kg)：ロッドの端の黄銅ウェイト二つを除くロッドの質量
m_{w1}：(kg)：ロッド端の黄銅ウェイト質量の二つの和
m_2：全体からm_1を除いた質量
m_{w2}(kg)：低部の黄銅ウェイトの質量
m_{2o}(kg)：稼動部全体からm_1,m_{w2}を除いた質量
l_{co}(m)：スライディングロッドと黄銅ウェイトを取り除いた全体の中心の位置

これらの値から導出した運動方程式にラグランジュの方程式を用いて定式化し、これを線形化して下式の状態方程式を得ると
$\dot{z} = Az + BF(t)$: $F(t)$は操作量
$Y = Cz$: Yは観測量、ただし　xとθを出力

$$z = \begin{bmatrix}\theta & \dot{\theta} & x & \dot{x}\end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_2 l_c g/J^* & 0 & m_1 g/J^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (J^* - m_2 l_0 l_c)g/J^* & 0 & -m_1 l_0 g/J^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -14.03 & 0 & 57.73 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 14.43 & 0 & -19.05 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{J^*}\begin{bmatrix} 0 \\ -l_0 \\ 0 \\ J_{o_e}/m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.13 \\ 0 \\ 7.71 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^* = J_{o_e} - m_1 l_o^2$$

また可制御行列はフルランクであり、可制御である。

3.　最適レギュレータ

３－1. 最適レギュレータの設計方法

最適レギュレータ理論では与えられた重み行列 $Q = Q^T \geq 0, R > 0$ に対して、評価関数

$$J = \int_0^\infty (z(t)^T Qz(t) + RF(t)^2)dt$$

を最小化するような状態フィードバックゲインKを求める。そのフィードバックゲインKは、
一意に定まり、以下のように与えられる。

$$K = -R^{-1}B^T P$$

ただし、Ｐはリカッチ方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

を満足する唯一の正定対称解（すなわち $P = P^T > 0$）である。[3]
また、実際に最適レギュレータを用いる際には重みＱ、Ｒを次のように与えることとする。

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (q_1, q_3 \text{は適宜指定})$$

R=1

３－２．最適レギュレータの性質（円条件）

状態フィードバック制御をするために最適レギュレータを用いるのは、安定性に優れ、またパラメータ変動に対して低感度であるなどロバスト性を有しているためである。その証明として円条件を示す。

最適レギュレータは開ループ伝達関数のナイキスト軌跡が点 $(-1+0j)$ のまわりの単位円の内側には決して入らない。よってナイキストの安定判別法からシステムは安定である。これを指して、最適レギュレータは円条件を満足するという。[5]

また $(sI-A)^{-1}=\phi(s)$ とすると $1+\Phi(j\omega)$ は、次の感度関数（開ループ伝達関数/閉ループ伝達関数）、

$$S(s)=\frac{1}{1+\Phi(s)}$$

の分母であるので、最適レギュレータではすべての周波数にわたって

$$|S(s)|=\frac{1}{|1+\Phi(s)|}<1$$

となる。よって感度関数の定義から、最適レギュレータはパラメータ変動や外乱に対する低感度性が言える。[5]

４．応答時間の改善

４－１．極について

最適レギュレータの重み行列 Q と R を変えると収束速度が変化するため、その変化と極との関係を調べる。最適レギュレータは、重みＱとＲの指定のみでゲインＫを求めるため、極を直接指定することができないが、ゲインＫを用いて極を出すことはできる。極はシステムの安定性と速応性を規定するものであるので評価対象として扱い、最適なゲインＫを求める。

極とは、伝達関数 $W(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{s-p_i}$ の p_i をさしており、極の実部が負側に大きくなると減衰性が向上し、虚部が大きくなると振動周期が短くなる。これに伴い極は以下のような位置にあることが望ましいといえる。

・すべての極が負側にある。
・ある線（①）よりも左側にある。
・原点から上下に上側の角度がαになるように直線をひきそれの内側にある。

（$\zeta=\sin\alpha$ とし、$\alpha>0.7$ であることが好ましい。これは、倒立振子がサーボ系なのでオーバーシュートを少なくするためである。）

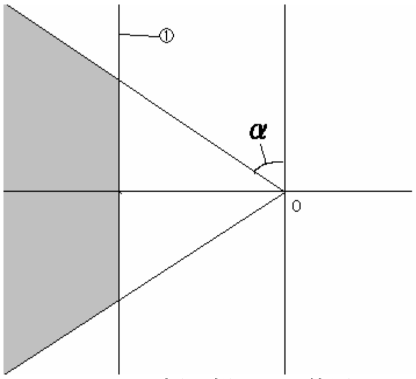

図２．　極の望ましい位置

色のついている部分が極の希望する範囲である。①線を左側に移動し、αを大きくした時の色のついた範囲内に入る極は、最適なものであるといえる。

４－２．拡張根軌跡法

古典制御理論の根軌跡法は、制御器のゲイン（スカラー）Ｋを０→∞に変化させた時、特性根の値を複素平面に描くものである。これを最適レギュレータに拡張する方法を考え出した。

行列Ｑは対角行列とする（今回は４×４行列である）。その対角要素の第１、第３要素を q_1, q_3 とし、残りを０とする。Ｒはスカラーであり、値を１に固定する。 $q_1=q_3$ とし、 q_1 を０→∞まで変化させる。この時の特性根の描く軌跡を複素平面に示す。

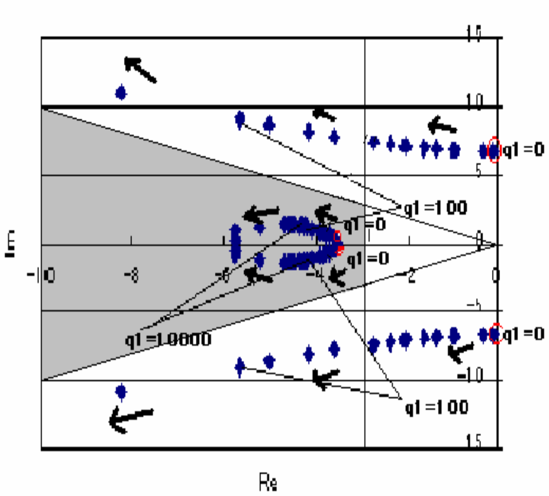

図３．拡張根軌跡法

この図は、重みを変えてそこから求められた極の位置を示した図である。縦は虚軸、横は実軸である。q1 を大きくすると、図中の矢印の方向へ動

く。この結果、拡張根軌跡法は以下の性質を持つことがわかる。

① 実軸に対象である
② q→∞で
  1）終点は零点（－5.4495）に収束する
  2）零点に収束する根以外は、無限遠に遷移する。漸近線の角度は、$\frac{\pi}{4}$ である。

よって、この拡張根軌跡法を使うことによって、重み Q の決定、つまり極の位置を決めることができる。
更に、この図より、重み$q_1 = 31$以上の時、支配極がハッチング部分の中に入ることがわかる。

5． 最適レギュレータ極指定法

最適レギュレータが指定した極（指定極）を持つように、以下のような評価式を導入し、重み行列Q（Rは固定）を決定する。

$$L = \sum_{i=1}^{4} \beta_i (\mathrm{Re}\left|\frac{1}{p_i} - \frac{1}{pp_i}\right|)^2 + \sum_{i=1}^{4} \gamma_i (\mathrm{Im}\left|\frac{1}{p_i} - \frac{1}{pp_i}\right|)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{\beta_i (aa_i - a_i)^2 + \gamma_i (bb_i - b_i)^2}{(aa_i^2 + bb_i^2)(a_i^2 + b_i^2)}$$

（ここでpp_iは指定極を指し、p_i はそれに対応した求める極(実現極)とする。また$pp_i = aa_i + bb_i j$、$p_i = a_i + b_i j$とする）

評価式Lは、指定極と実現極の複素平面上での距離を求めた。その際に極の逆数を用いたのは、実現極における支配極（最も実部の絶対値が小さく、複素平面上で原点により近い極）が指定極の支配極に近づいたものを最優先して選ぶためである。

支配極の絶対値は小さくなるため、評価式に逆数を用いると指定極の支配極と実現極の支配極の距離の差をとる項の分母が小さくなる。したがってこの項が全体としてのLの値を大きくする原因となる。よって、指定極の支配極とそれに対応する実現極との複素平面上の距離をなるべく小さくした場合に、Lはより小さな値になるといえる。

評価式中にβ_i、γ_iという係数を設けたが、これは評価式中の実部項のウェイト（β_i）と虚部項のウェイト（γ_i）である。しかしこれらは、必要があるとき以外は$\beta_i = \gamma_i = 1$としておく。

6． 倒立振子の制御実験

6－1．プログラムの作成と概要

評価式Lを計算するプログラムを、ソフトウェアのＭＡＴＬＡＢを用いて作成する。（卒業論文付録に掲載）

プログラムは q1 と q3 を指定した範囲内で増やし、その中で最小となる L を求めている。またそのときの q1 と q3 をそれぞれ q1best と q3best に代入している。こうすることで、指定極の支配極に実現極の支配極をより近づけることが出来、最も近づいたときの重みは q1=q1best、q3=q3best になる。

制御対象と最適レギュレータの極の性質から二次遅れ系で考えると、極は二組の共役な複素解をもつので、プログラム中では共役解のそれぞれ一つだけ(p1 および p3)を用いてLを計算している。

6－2．プログラムの実行

以下のように指定極を定める。

①収束が遅い応答：$pp_i = -3.6 \pm 1.74j, -10 \pm 10j$

②収束が速い応答：$pp_i = -5.15 \pm 3.64j, -10 \pm 10j$

最小化プログラムを用いて①、②に対する実現極を求める。(以下数字はすべて小数点以下２位までを求める)

①

q1best	153
q3best	586
実現極(p_i)	$-3.61 \pm 1.59j, -9.43 \pm 11.51j$
フィードバックゲイン（K）	$[20.79 \quad 8.11 \quad 68.76 \quad 12.99]$
固有角周波数（ω_n）	3.94
減衰係数(ς)	0.92
固有振動数(Hz)	0.63

②（ただし、$\beta_i = 50, \gamma_i = 10$ として求めた）

q1best	4200
q3best	2100
実現極(p_i)	$-4.90 \pm 1.19j, -17.84 \pm 19.34j$
フィードバックゲイン（K）	$[87.76 \quad 32.21 \quad 238.12 \quad 44.05]$
固有角周波数（ω_n）	5.04
減衰係数(ς)	0.97
固有振動数(Hz)	0.80

6－3．シミュレーションと制御実験

①、②のシミュレーション結果と制御実験の結果を示す。

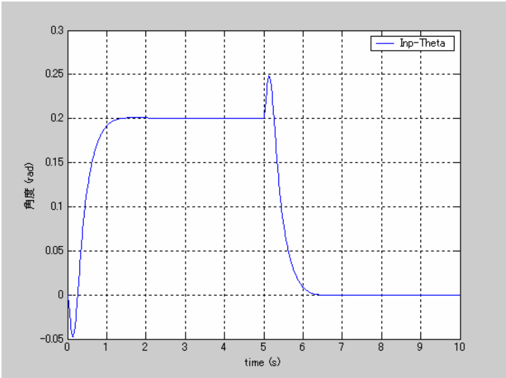

図４．(a) ①におけるシミュレーション結果

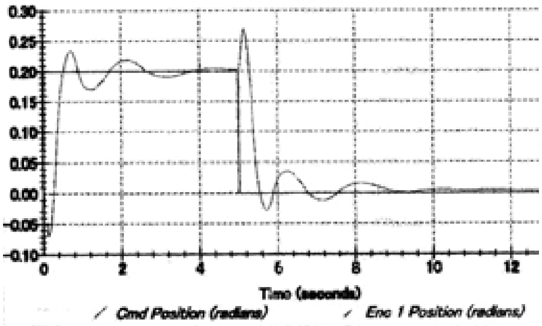

図４．(b) ①における制御実験の実測値

	立ち上がり時間 (sec)	オーバーシュート (%)	振動周期 (Hz)
理論値	0.6	0	0.66
実測値	0.4	17.0	0.63

表４．(c)　①の各データ

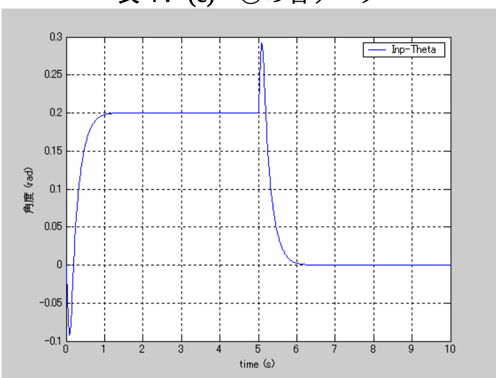

図５．(b) ②におけるシミュレーション結果

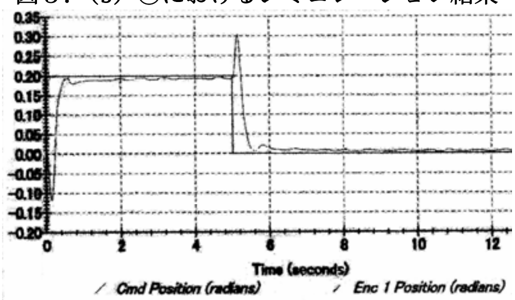

図５．(b) ②における制御実験の実測値

	立ち上がり時間 (sec)	オーバーシュート (%)	振動周期 (Hz)
理論値	0.45	0	0.80
実測値	0.38	0	0.80

表５．(c) ②の各データ

６－４．考察

①のケースで制御実験の実測値は、シミュレーションどおりの減衰に至らなかった。しかし、立ち上がり時間、振動周期はほぼシミュレーションに一致した。

②のケースでは、ほぼ理論値に従った制御実験ができたが、入力の値が大きくなっているためにわずかにノイズが発生しており、制御対象に強い負荷がかかっているようだった。

以上から、②のように複素数平面で虚軸から遠い支配極を持ち、また減衰係数ςが 1 に近いような場合には、非常に早い整定時間とオーバーシュートの少ない理想的な制御が行えることが分かった。①のケースにおいて実測では、シミュレーション以上にオーバーシュートが生じているが、この原因として考えられるのは、制御対象が元々持つ非線形性や、またスライディングロッドを滑らせるスライディングベルトの歯車による「ガタ」の影響である。これらを考慮することは必要であるがしかし、一部のオーバーシュートを除き、全体としてはほぼ望みの応答を得ることはできた。

整定時間が短く、またオーバーシュートをできるだけなくした応答を得るためには、操作量を可能な範囲で大きくして零点に極を近づける必要がある。②のケースの操作量は十分に許容範囲内であった。以上から、②はオーバーシュートをなくした例として非常に良い結果を得た。

上述より、拡張根軌跡法と最適レギュレータ極指定法の理論に基づいて制御系を設計し、倒立振子の実験で理論の有効性を確認した。

参考文献

[1]モデル 505 マニュアル、ECP
[2]PROJECT REPORT、ECP
[3]井上和夫、川田昌克、西岡勝博、「わかりやすい制御工学」、森北出版、2002
[4] 岩井善太、石飛光章、川崎義則、「制御工学」、朝倉書店、2002
[5]伊藤正美、「自動制御」、丸善、1995
[6]増渕正美、「システム制御」、コロナ社、1987
[7]細江繁幸、「システムと制御」、オーム社出版、1997

＊MATLAB は米国 the MathWorks 社の登録商標