

極配置によるペンダボットの制御系設計

－ 状態フィードバック制御と最適レギュレータ－

2000MM002 坂野 誠一 2000MM040 川津 勇治
 指導教員 高見 勲

1 はじめに

近年、非線形性、低次元化等で生じるモデルの不確かさを考慮したロバスト制御が盛んに研究されており、ロバスト性の高いコントローラが要求されている。一方、世の中のほとんどの現場では、制御系の過渡応答を自由に指定できる古典制御理論や現代制御理論等の扱いやすい従来法が広く使われているため、実際に実装されている従来法のロバスト性について考えることは必要なことである。本論文で採用している現代制御理論は、可制御であればその制御系の過渡応答が自由に決められ、最適化手法を用いれば入力の変数倍変化に対するロバスト性が一部保障されるが制御対象自身の変動に対するロバスト性は保障されないことが分かっている [5]。そこで、従来法のコントローラの特長変動に対するロバスト性を考察するために、制御対象としてロボット工学の分野において 2-リンクアームマニピュレータの簡単なモデルで有名なペンダボット [1] を選んだ。本研究の中心テーマは二つある。一つは世の中で非線形モデルから線形モデル導出の際に広く使われている、制御したい平衡点での線形近似に着目し、そのモデルから導かれたコントローラのロバスト性について検証することである。すなわち、平衡点が変わってもそのコントローラがペンダボットを安定化できるかどうかを実験を通して考察する。その際、平衡点を目標値と考え、新たにその目標値に追従させるようなフィードバックモデルを考え、シミュレーションおよび実験を行う。コントローラはアッカーマンの極配置法による状態フィードバック制御を用いた。もう一つは、目標値への追従性を上げるため、新たに偏差の積分項を追加した五次拡大系を考え、さらに追従性の高いコントローラを設計することを目指した。

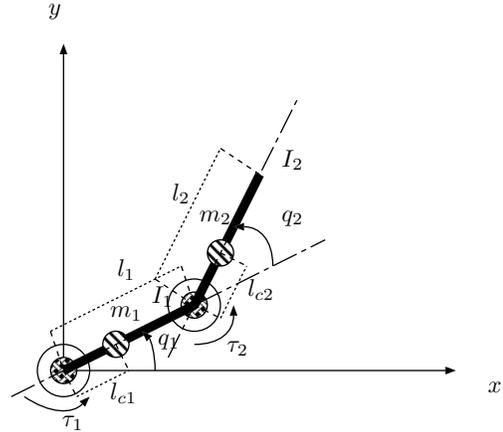


図1 ペンダボットのモデル

2 モデリングと線形化

ペンダボットは図1のような様式であり、ラグランジュの運動方程式によって物理モデルを求め $q_1 = -\frac{\pi}{2}, q_2 = \pi$ における平衡点 (以下ミドルポジション) で線形化を施すと、次の状態方程式が得られる [1]。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx \quad \text{ただし, } x = [q_1 - x_{r1}, \dot{q}_1, q_2 - x_{r3}, \dot{q}_2]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

3 ペンダボットの特長

線形化によって平衡点近傍のペンダボットの特長について調べることができる。ミドルポジションでペンダボットの極を調べると、 $\{\pm j12.1358, \pm 7.7876\}$ であることが分かった。これより、右半平面に極を持つので、ミドルポジションではペンダボットは不安定な対象であると言える。また、異なる平衡点近傍で線形化したときの特長変動については、ボード線図を使うと直観的に分かりやすいであろう。図2は、ミドルポジションから $0 \sim \pm \frac{\pi}{3}$ [rad] 移動したときの式 (1) をボード線図で表したものである。この図から、ミドルポジションからずれる

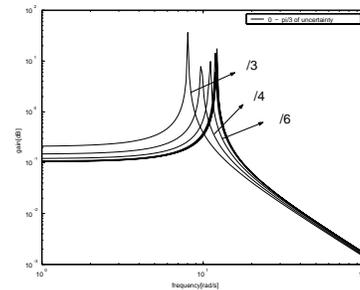


図2 異なる平衡点におけるペンダボットの制御特性

る程、ペンダボットのピーク周波数帯が左にシフトしていくことが分かる。さらに、 $\frac{\pi}{6}$ 付近から摂動が大きくなっ

ていることも確認できる。

4 状態フィードバック制御

図3の $r = 0$ のときに $u = -Kx$ でシステムを安定化させることを状態フィードバック制御という。このとき、常に状態 $x \rightarrow 0$ となるように制御される(レギュレータ) [4]。そして、安定化可能な必要十分条件はシステムが可制御であることである [4]。アッカーマンの極配置

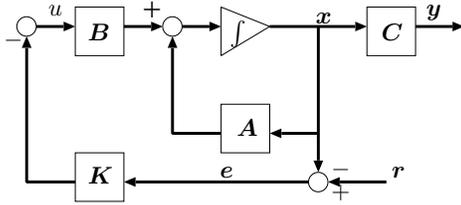


図3 状態フィードバック制御のブロック線図

法 [2] を用いて状態フィードバックゲイン K を求める。ペンダボットの指定極は、取扱説明書 [3] で指定された極を用いる。この値は、

$$\{-13.6 \pm j7.2, -8.75 \pm j1.45\} \quad (3)$$

である。これより、状態フィードバックゲイン K が求まる。ミドルポジションで線形化した行列 A, B を用いて MATLAB *1 で計算すると、

$$K = [122.2984, 13.0833, 151.9063, 19.8340] \quad (4)$$

が求まる。すなわち、入力 u は

$$\begin{aligned} u &= -Kx \\ &= -122.2984(x_1 + \frac{\pi}{2}) - 13.0833x_2 \\ &\quad - 151.9063(x_3 - \pi) - 19.8340x_4 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。また、状態 x_2, x_4 はエンコーダから計測できないため、状態 x_1, x_3 を微分して、過去三項の平均でフィルタしたものを使う [1]。すなわち、

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{x_1(t) - x_1(t-h)}{h} \\ \bar{x}_2(t) &= \frac{x_2(t) + x_2(t-h) + x_2(t-2h)}{3} \end{aligned}$$

である。 x_4 についても同様である。

4.1 実験結果と考察

図4(左)に実験結果を示す。ミドルポジションに対して約 $0.07[\text{rad}]$ のずれが生じた。これをオフセットと呼ぶ。操作量 u は、目標値(ミドルポジション)に近い程小さくなる。ミドルポジションでは、摩擦の影響が強くなるため、操作量によるトルク、重力の分解による力、そして摩擦による力関係が均衡するためオフセットが残ると考えられる。

5 最小次元オブザーバ

状態 x_2, x_4 を推定するための手法としてオブザーバを導入する。オブザーバには測定不可能な状態変数だけを推定する最小次元オブザーバを用いる。ゴピナスの方法 [4] に従い最小次元オブザーバを設計した。状態フィードバック系の極とオブザーバの極は分離定理により独立に設計できることが分かっている。そのため、オブザーバを追加した全体の閉ループ系は、極配置による極とオブザーバの極となる。そこで、オブザーバの極が全体の閉ループ系で支配的にならないように、極配置による極よりも十分に左に来るように設計する。ここでは、オブザーバの極を $\rho_1 = -60.0, \rho_2 = -60.0$ として設計した。

5.1 実験結果と考察

図4(右)に実験結果を示す。ミドルポジションに対して約 $0.1[\text{rad}]$ のオフセットが残った。結果的にオフセットが大きくなったので制御性能は悪くなったと言えるが、制御信号や推定量に表れるノイズは減少した。また、演算上に問題があるせいか実験では安定性も悪くなった。そのため、後の実験では三項平均を用いた。

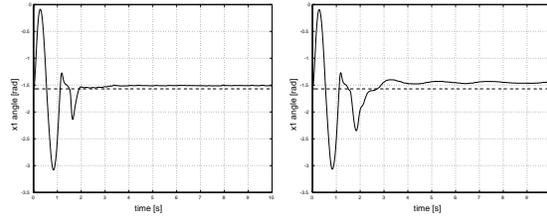


図4 ミドルポジションにおける振上げ実験。極配置 $\{-13.6 + j7.2, -13.6 - j7.2, -8.75 + j1.45, -8.75 - j1.45\}$ とした場合。速度指定(左)、オブザーバ(右)

6 目標値指定の場合のオフセット解析

図3に目標値 r を与えることによって目標値に追従するモデルを考え、オフセットはどの程度残るかを考察する。最終値定理を用いてオフセットを計算すると、

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(a_2 - a_1)(a_4 - b_2 k_3) + (a_4 - a_3)(a_2 - b_1 k_3)}{a_1 a_4 - a_2 a_3 - a_1 b_2 k_3 + a_3 b_1 k_3 - a_4 b_1 k_1 + a_2 b_2 k_1} r_1 \\ 0 \\ \frac{(a_2 - a_1)(a_3 - b_2 k_1) - (a_4 - a_3)(a_1 - b_1 k_1)}{a_1 a_4 - a_2 a_3 - a_1 b_2 k_3 + a_3 b_1 k_3 - a_4 b_1 k_1 + a_2 b_2 k_1} r_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, a_3 = \frac{\partial f_4}{\partial x_1}, a_4 = \frac{\partial f_4}{\partial x_3}, b_1 = \frac{\partial f_2}{\partial u}, b_2 = \frac{\partial f_4}{\partial u}, r_1 = -r_3, r_2 = r_4 = 0$ である。図5は、ミドルポジションからの各目標値に対して、オフセットがどれだけ残るかをシミュレーションし、プロットしたものである。図5より線形的にオフセットは増加し、目標値が大きいと、ありえない所に振子が動くことが分かる。従って、このモデルでは根本的に希望の目標値に

*1 MATLAB/Simulink は米国 Math Works 社の登録商標です。

指定することはできない。

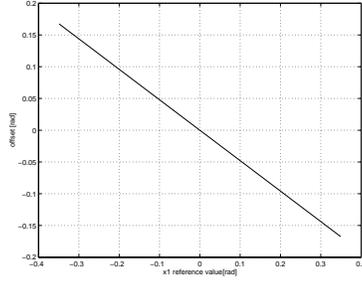


図5 目標値に対するオフセット

7 積分器拡大系による最適レギュレータ

目標値にオフセットなく追従するため、偏差の積分器を導入し、その拡大システム系を考える。出力の目標値 r_0 からの偏差を $e(t)$ とし次のような変数

$$z(t) = - \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (6)$$

を導入する。この拡大システムの偏差系は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}(t) \quad (7)$$

ただし $\tilde{x}(t) = x(t) - x_s$, $\tilde{z}(t) = z(t) - z_s$, $\tilde{u}(t) = u(t) - u_s$ とする。また、平衡状態を x_s, z_s, u_s とする。次に式 (7) に評価関数

$$\int_0^\infty \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix}^T \tilde{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} + r \tilde{u}^2(t) \right\} dt \quad (8)$$

を設定する。この評価関数を最小化するように状態フィードバックゲイン $\tilde{\mathbf{K}}$ を求める方法を最適レギュレータと呼ぶ [5]。ただし、

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} q_1 \mathbf{C}^T \mathbf{C} & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1, 0, 0, 0] \quad (9)$$

である。評価関数の重みは $q_1 > 0, q_2 > 0, r > 0$ であり、このとき最適フィードバック制御則は、

$$\tilde{u}(t) = -\tilde{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

となる。ただし $\tilde{\mathbf{K}}$ は、

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\mathbf{k} \ k_5] = r^{-1} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \quad (11)$$

であり、 $\tilde{\mathbf{P}}$ は次のリカッチ型行列方程式

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} r^{-1} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad (12)$$

の解である。式 (8) に対する最適状態フィードバック則は (10) のように求まったが、 $u(t)$ について書き直すと

$$u(t) = -\mathbf{k}x(t) - k_5 z(t) \quad (13)$$

となる。

7.1 実験結果と考察

以下の図 4 に、シミュレーションと実験の結果を示した。表 1 は時定数 (目標値入力から、目標値に対し 63.2% になる時間) を比較したものである。ミドルポジション

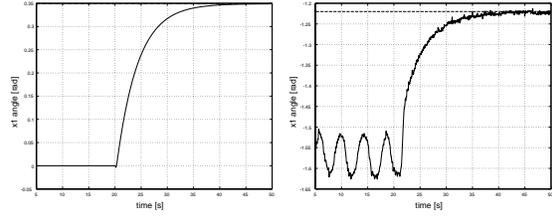


図6 ミドルポジションから目標値 $+20^\circ$ ($+0.348888[\text{rad}]$) 指定したシミュレーション (左) と実験 (右)。重み $q_1 = 400, q_2 = 30$ とした場合

表1 時定数による検証 その一

	時定数 T	$0.632r_0$	$\frac{0.632r_0}{T}$
シミュレーション	4.3927	0.22049	0.05019
実験	4.1022	0.22049	0.05375

ン安定状態から、目標値を指定した際の過渡応答部分 (5 秒 ~ 50 秒) のみの実験結果と比較検証する。過渡応答は一次遅れ系のような波形を示したので、検証のための指標として、時定数 T とそのときの x_1 座標の比を用いた。表 1 を見ると、時定数 T は約 0.3 秒の誤差があるが許容範囲と考えられる。ただし、図 4 における実験では、目標値を指定する 20 秒以前はミドルポジション付近でふらついている現象が見られ、正確な時定数は計れなかったことと目標値入力の際のタイミング誤差があることを述べておく。このふらつきは、リミットサイクルと呼ばれる現象であり、この周期と振幅で安定な振動が持続する。リミットサイクルが生じると現場ではハードの摩擦や騒音が起こり、故障の原因となるため、できるだけこれを小さくすべきである。この原因として線形化で無視された非線形特性やモデルに考慮しなかった摩擦が考えられるが、特に摩擦の影響が強いと推測される。図 4 では、このような現象は見られなかった。それは、力が均衡するためと既に述べた。拡大系においては、目標値に追従させる機構として積分器が加わり、積分器によって増幅された入力力が力の均衡を崩すと推測される。ペンダボットのメカニズムを考えると、ミドルポジションにちょうど来たとき、少しでも行き過ぎると近付いてきた方向に摩擦を受ける。またミドルポジションでは重力が真下に働くため、ペンダボットは摩擦の影響を最も強くうける。つまり、積分器が助長した摩擦によって行き過ぎ量が生じ、この繰り返しがリミットサイクルとなると推測できる。またミドルポジション以外の点でリミットサイクルが生じないのは、摩擦が常に一定方向に働いているからと考えられる。本

来なら摩擦モデルを組み込んで検証すべきであるが、最適レギュレータの重みのチューニングによってリミットサイクルを減少できることが分かった。すなわち、積分器のゲインを決める重み q_2 を制御系の安定性に影響を与えない程度の値 (約 30) に固定しておき、もう一つの座標変動を抑制する重み q_1 をできるだけ大きくすればよい。図 7 の実験では、ふらつきは見られない。

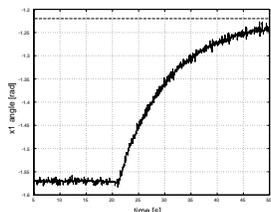


図 7 図 6 同様の実験。重み $q_1 = 3000, q_2 = 30$ とした場合

8 ロバスト安定性評価と追従性能の向上

本来、制御理論という根軌跡はノミナル (変動しない) な制御対象に対して、フィードバックゲインを変化させたときの閉ループ系の極の軌跡を描いたものである。ここでは、逆の発想で求めた状態フィードバックゲインを固定し、制御対象が変動したときの閉ループ系の極の軌跡について調べる。以下に手順を示す。

1. 線形化により、基準となるモデル A_n, B_n を求める (ミドルポジション)。
2. そのモデルに対して極配置法あるいは最適レギュレータ法により、状態フィードバックゲイン K_n を求める。
3. そのゲイン K_n を固定し、考えられうる全ての制御対象の変動に対して、閉ループ系 $A_r - B_r K_n$ の極を求める。
4. 最後に求めた極を複素平面上にプロットする。

この作業により、実際に変動後の閉ループ系の極が計算できるため、その状態フィードバックゲインがどの程度目標値変動に対して耐性があるかどうかを調べることができた。特性変動による根軌跡の解析の結果、拡大系では $\pm \frac{\pi}{9}$ 付近が安定限界であることが分かった。さらに、 $\pm \frac{\pi}{9}$ においては十分大きい重みを指定しても、安定性を保障できることが分かった。そこで、 $\pm \frac{\pi}{9}$ までなら目標値を指定でき、過渡応答が十分速く、リミットサイクルによる影響ができるだけ少なくなるような制御系設計を目指した。

8.1 実験結果と考察

以下の図 8 は、この仕様の下でできるだけ重みを大きくし、ミドルポジションから目標値を $+20^\circ (+0.348888)$ ~ $-20^\circ (-0.348888)$ 変化させたときのシミュレーションと実験の結果である。これより、追従性、速応性ともかなりよくリミットサイクルも生じない制御系を設計す

ることができた。

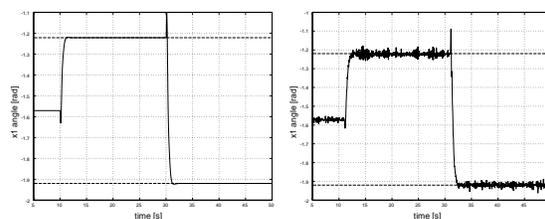


図 8 目標値を 10 秒後にミドルポジションから $+20^\circ (+0.348888)$ に指定し、30 秒後に $-20^\circ (-0.348888)$ に指定するシミュレーション (左) と実験 (右)。重み $q_1 = 1000, q_2 = 40000$ とした場合

表 2 時定数による検証 その二

	時定数 T	$0.632r_0$	$\frac{0.632r_0}{T}$
シミュレーション	0.475	0.22049	0.46420
実験	0.48	0.22049	0.45936

9 おわりに

本研究では目標値を指定できるような制御系を設計し、またペンダボットの特性を生かし、 $\pm \frac{\pi}{9} [rad]$ までの目標値を指定することもできた。このように厳密な線形化を行い、特性をうまく把握できれば、ペンダボットのような多変数制御系を扱うには状態方程式に基づく現代制御理論が非常に有効な手法となる。何より、限界まで性能を向上させる制御系設計を目指すなら、現代制御理論はまさに最適な手法と言える。しかしながら、実験ではシミュレーションで表れないような現象がいくつも生じ、これらを説明するにはより厳密に解析してシミュレーションを行う必要がある。

謝辞

本論文を作成するにあたり、多大な助言を頂き、また熱心に御指導下さいました指導教員である高見勲教授に深く感謝致します。

参考文献

- [1] BLOCK, D.J.: MECHANICAL DESIGN AND CONTROL OF THE PENDUBOT, University of Illinois at Urbana-Champaign(1996).
- [2] 岩井善太: 制御工学, 朝倉書店 (1999).
- [3] Mechatronic Systems, Incorporated: Mechatronics Control Kit Model M-1 Use's Manual, Mechatronic Systems, Incorporated(2001).
- [4] 白石昌武: 入門現代制御理論, 朝倉書店 (1995).
- [5] 野波健蔵, 西村秀和, 平田光男: MATLAB による制御系設計, 東京電気大学出版局 (1998).