ネットワーク上の連続型絶対 p センター問題の研究

2000MM029 岩田 梓　　2000MM095 内田 麻衣子
指導教員　鈴木 敦夫

1　はじめに

施設配置問題において, 緊急医療施設などを配置するモデルに絶対 p センター問題がある [1, 2]. このモデルは, センターから最も遠い需要点までの距離が最小となるように施設を配置することを目的とし, 全てのノード上と枝上を施設配置候補点とするものである. この従来の絶対 p センター問題は需要点をノード上のみとして施設を配置している. しかし, ネットワークを都市として考えた場合, 地域利用者はノード上のみでなく, 枝上にも存在する. そのため, 枝上も需要点として考えると, 従来の絶対 p センター問題の場合よりもさらに遠い需要点が見つかるので, それに対する最適なセンターの配置場所を求めることができるのではないかと考えた. この枝上にも需要点があるとして考える絶対 p センター問題のモデルは未だ提案されていない.

そこで, 本研究ではノード上と枝上の点を需要点として考え, 施設を配置する連続型絶対 p センター問題についてモデルをつくる. 解法には, ネットワークボロノイ分割を用いる. 従来の絶対 p センター問題と施設の配置場所や計算の手間を比較し, 考察する. ここでは, 連続型絶対 1 センター問題について考える.

2　連続型絶対 p センター問題

従来の絶対 p センター問題は, 需要はノード上のみにあるが, 連続型絶対 p センター問題では, 需要はネットワーク全体にある. よって, 連続型絶対 1 センター問題は以下のような定式化となる.

連続型絶対 1 センター問題の定式化

E : 枝の集合
V : ノードの集合
$N(E,V)$: E と V で構成されているネットワーク
$\boldsymbol{x}$: ネットワーク上の点
$\boldsymbol{x_1}$: 施設の配置場所
$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x_1})$: ネットワーク上の点と施設の配置場所との間の距離
連続型絶対 1 センター問題は次のように定式化される.

$$\text{目的関数} \qquad \max_{\boldsymbol{x}\in N(E,V)} d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x_1}) \longrightarrow \min \qquad (1)$$

$$\text{制約条件} \qquad \boldsymbol{x_1} \in N(E,V) \qquad (2)$$

3　ネットワークボロノイ分割

ネットワークボロノイ分割とは, ネットワーク上にある点の集合 (これらの点を母点と呼ぶ) のどれに一番近いかによってネットワークを分割したものである. この手法は, ネットワーク上の施設配置問題に対する強力な解法のツールになると考えられている.

本研究では, 連続型絶対センターを配置する候補の枝の両端を母点として, どの母点に一番近いかによってネットワークを分割する. 距離はダミーノードから各ノードに対する最短距離をダイクストラ法で求め, これを用いる. ここでダミーノードとは, 母点としてとった 2 つのノード間を移動するセンターの代わりとしてつくったノードである. この手法を用いることによって, 最遠点を簡単に計算でき, センターの候補点を効率良く列挙することができる.

4　連続型絶対 p センター問題の解法のアルゴリズム

4.1　最遠点

絶対 p センター問題はセンターから最も遠い距離を最小にするものである. これは 2 つの母点からの距離が最も遠いものを見つければよい. これには次の 6 つの場合がある. ここで, 境界とは母点 A, B から最も遠い距離がともに等しい地点である.

1. センターからの最遠点が 2 点ともノード上の場合
2. センターからの最遠点が 2 点とも枝上の場合
3. センターからの最遠点が 2 点とも境界上の場合
4. センターからの最遠点がノード上と枝上の場合
5. センターからの最遠点がノード上と境界上の場合
6. センターからの最遠点が枝上と境界上の場合

それぞれの場合と距離のグラフをまとめた図を以下に示す. ●はセンター, d_1, d_2 は最遠点を示している.

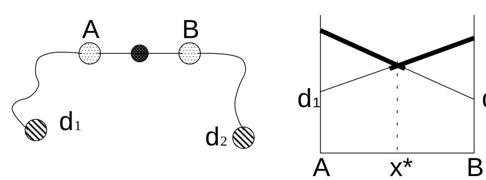

図 1　センターからの最遠点が 2 点ともノード上の場合

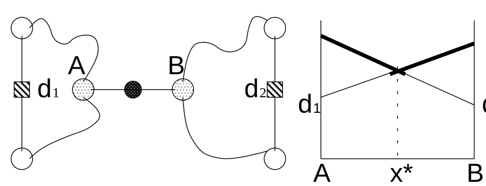

図 2　センターからの最遠点が 2 点とも枝上の場合

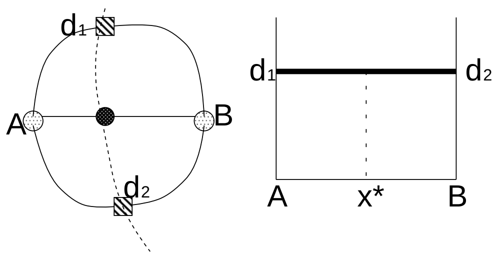

図 3　センターからの最遠点が 2 点とも境界上の場合

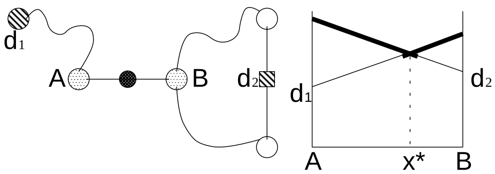

図 4　センターからの最遠点がノード上と枝上の場合

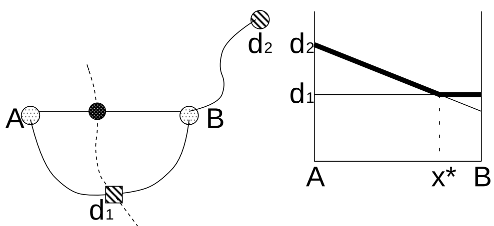

図 5　センターからの最遠点がノード上と境界上の場合

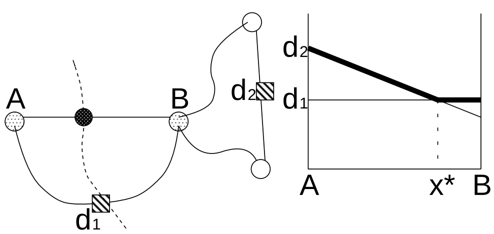

図 6　センターからの最遠点が枝上と境界上の場合

4.2　特別な場合

4.1 節で述べた最遠点の 6 つの場合の中で, 距離のグラフが違う変化をみせる特別な場合が 2 つある．それを以下で説明する．

4.2.1　パターン 1（センターからの最遠点が 2 点とも境界上の場合）

図 7 を用いて説明する．境界点を d_1, d_2, 最遠点を d_2 とする．そしてノード 2 から d_1 までの距離はノード 2 から d_2 までの距離より短いとする．センターをノード 1 からノード 4 へ移動させていくと, 境界点が移動し, センターから各ノードまでの最短路が変わり, 各ノードの母点も変わってくる．母点が変わると境界点が枝上の点に変わるときがある．このとき, 距離の変化をみると一定の距離だったものが減少してくる．よって, 図 7 の距離のグラフのような変化がみられる．

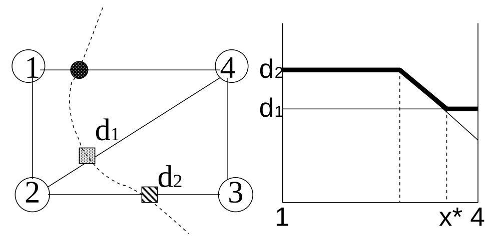

図 7　パターン1

4.2.2　パターン 2（センターからの最遠点がノード上と境界上の場合）

図 8 を用いて説明する．まず, 境界点を d_1, 最遠点を d_2 とする．センターをノード 1 からノード 8 へ移動させていくと境界点が移動し, センターから各ノードまでの最短路が変わり, 各ノードの母点も変わってくる．センターから各ノードまでの距離の変化をみていくと, 境界点が通過するノードまでの距離は, 通過するまでは増加していたが, 通過後は母点が変わり減少していく．よって, 図 8 の距離のグラフのような変化がみられる．

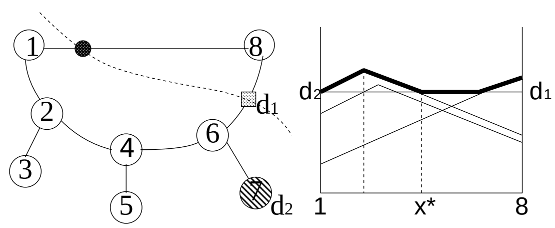

図 8　パターン2

4.3　アルゴリズム

連続型絶対 1 センター問題の解法のアルゴリズムを以下に簡潔に示す．

1 :　枝の両端を母点として, ネットワークボロノイ分割を構成する．

↓

2 :　ノード上の最遠点を見つける．片端の母点とつながっている全てのノードに対する最短距離の中で最長距離を $max1$ とする．同様にもう片端の母点とつながっている全てのノードに対する最短距離の中で最長距離を $max2$ とする．このときの更新された最遠点の座標を求める．

↓

3 :　枝上の最遠点を見つける．枝上の需要点までの距離がこれまでに求めた最長距離 $max1$ より大きい場合, $max1$ を更新する．そして, このときの更新された最遠点の座標を求める．$max2$ も同様に行なう．

↓

4 : 境界上の最遠点を見つける．ダミーノードから境界点までの最短距離の中で, 最長距離を求める．

↓

5 : その境界点までの最長距離がこれまでに求めた $max1$, または $max2$ より大きい場合, それぞれをその境界上の最遠点で置き換える．このときの最遠点の座標も置き換える．

↓

6 : 最遠点が境界上の場合, 通常センターを移動させても, 距離は一定であるが, 4.2 節で挙げた様に, 最遠点が変化し, その最遠点までの距離が変化する特別な場合がある．それを見つけるために, センターを配置する枝の距離を全ての枝の中で最小の枝の距離の半分の値 (探索値) で割り, その商を探索回数として, その回数だけ最遠点までの距離の変化を調べていく．
ダミーノードを探索値分動かし, そのダミーノードの位置でダイクストラ法を用いてダミーノードから全てのノードに対しての最短路をみつけ, 最短距離を計算する．そして最後に, 余り分を探索するためにダミーノードを右端の母点の位置まで移動させ, そのダミーノードの位置でもう一度探索を行なう．
枝 $maxl$ が境界を含まない枝になり, ダミーノードからその $maxl$ の枝上の最遠点までの距離が $max1$, または $max2$ より小さい場合, 探索を終了する．
ここでは, 距離が減少する地点を見つけることが目的なので, $max1$, $max2$ は置き換えない．

↓

7 : $max1$, $max2$ の距離の差がセンターを配置する枝の長さより小さい場合, その枝上にセンターを配置することができるので, $max1$ と $max2$ を足して 2 で割った値を $center$ とする．このときのセンターが枝を内分する内分比をもとに, センターの座標を求める．

↓

8 : (6) で最遠点までの距離が $max1$, または $max2$ より小さくなったダミーノードの位置で (1) へ戻り, 最適なセンターの配置場所を求めていく．

以上ことを全ての枝について行ない, 最終的に最適なセンターの配置場所を求める．

5 計算例

4.3 節のアルゴリズムを用いて, 連続型絶対 1 センター問題のプログラムを C 言語を用いて作成した．また, 従来の絶対 1 センター問題と比較するために, 従来の絶対 1 センター問題のプログラムも作成した．

●は最遠点, ◎はセンターを示している．

5.1 ドローネ三角網

計算時間は図 9 では 0.913 秒, 図 10 では 3.750 秒となった．ここで用いたデータはノード数 100, 枝数 286 である．

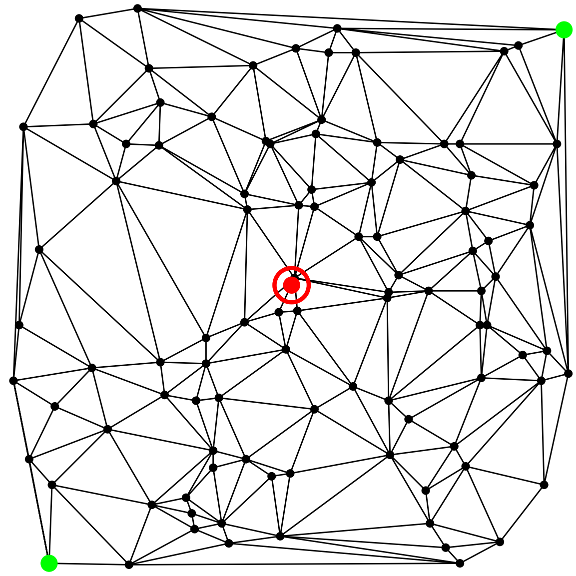

図 9　従来の絶対 1 センター問題

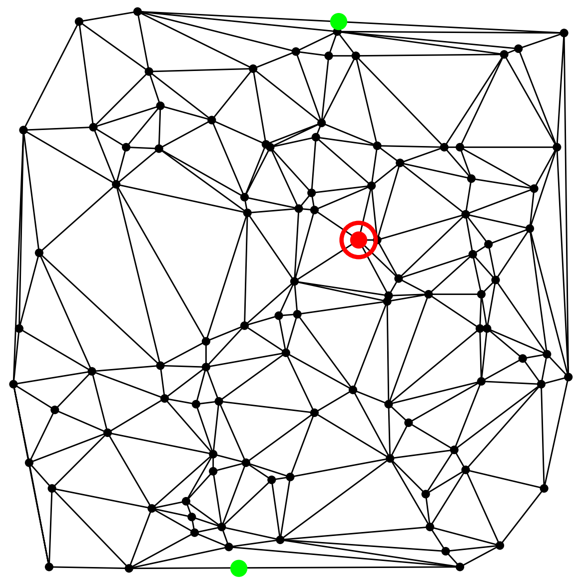

図 10　連続型絶対 1 センター問題

5.2 岐阜市の道路網

このデータでは, 最遠点が 2 点ともノード上のため, 従来の絶対 1 センター問題と連続型絶対 1 センター問題の計算結果は同じになった．そのため, 以下で連続型絶対 1 センター問題の計算結果のみを示す．計算時間は図 11 の連続型絶対 1 センター問題では 3 分 9.310 秒, 従来の絶対 1 センター問題では 1 分 35.080 秒となった．ここで用いたデータはノード数 1927, 枝数 3200 である．

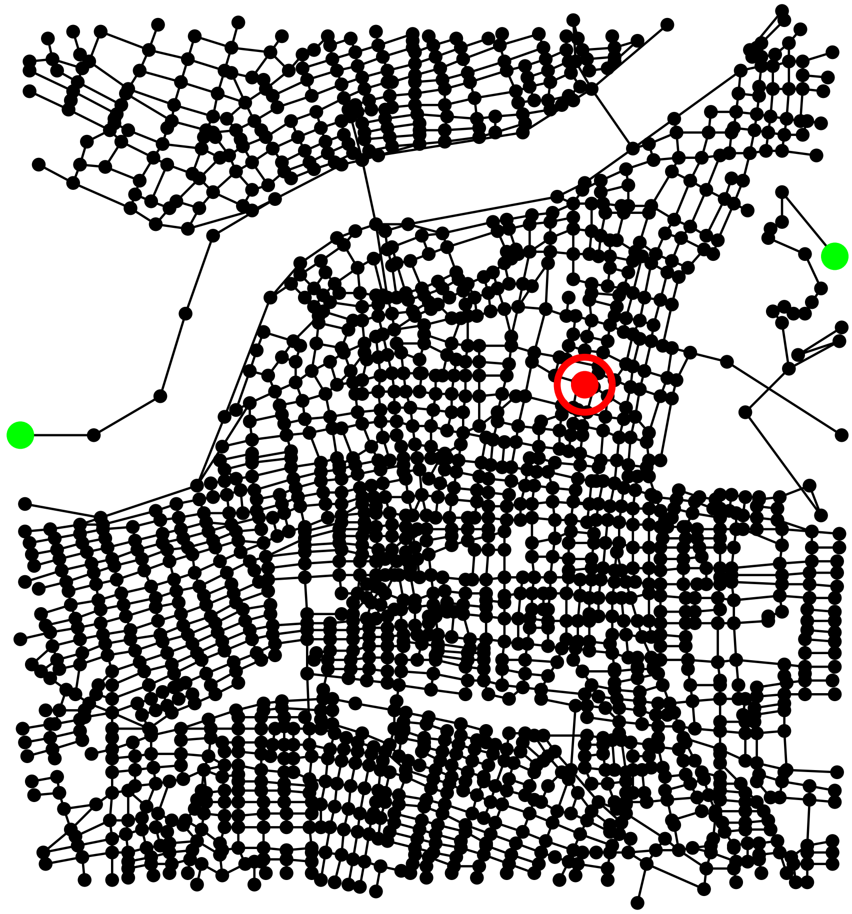

図 11　岐阜市の連続型絶対 1 センター問題

6　考察

5.1 節では, 図 9 の従来の絶対 1 センター問題の最遠点はノード上にあるが, 図 10 の連続型絶対 1 センター問題の最遠点は枝上も需要点に含めるので, より遠い需要点を見つけ出すことができ, それに対する最適なセンターの配置場所を求めることができた.

5.2 節の岐阜市の道路網では, 最遠点は長良川の堤防沿いの道と金華山の中腹となった. 堤防沿いの道の場合, このネットワーク上では長良川に橋が 2 本しか架かっていないので, センターから遠回りとなり, 最遠点となる. また, 金華山の中腹の場合, 金華山に行く道は限られているので, センターから遠回りとなり, 最遠点となる. このデータでは, 最遠点はノード上なので従来の絶対 1 センター問題と連続型絶対 1 センター問題ではセンターの配置場所は変わらなかった.

次に従来の絶対 1 センター問題と連続型絶対 1 センター問題の計算の手間を比較する. 従来の絶対 1 センター問題のオーダは $O(mn^2 \log n)$ である. 一方, 連続型絶対 1 センター問題のオーダも $O(mn^2 \log n)$ である. ここで, m は枝数, n はノード数である. このことから, 連続型絶対 1 センター問題は需要点を従来のものよりも増やし, それに対する最適なセンターの配置場所を求めているにもかかわらず, 従来の絶対 1 センター問題と計算の手間が同じになり, 良い結果を得ることができた.

7　おわりに

本研究では連続型絶対 1 センター問題について取り組んだ. 枝上も需要点に含めた場合は, 従来のものよりもより遠い需要点を見つけ出すことができるので, それに対する最適なセンターの配置場所を求めることができた. また, 計算の手間も従来のものと連続型ではオーダが同じになり, 良い結果を得ることができた.

このモデルは, ノード上と枝上に需要がない場合でも需要があるものとして考えている. 実際には, 需要がない需要点が存在する場合があるので, 需要を考慮した場合のセンターの配置場所は変わってくるであろう. そのため, 今後これをふまえた連続型絶対 p センター問題に拡張する必要がある.

参考文献

[1] Mark S. Daskin: *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*, John Wiley & Sons Inc., New York (1995).

[2] 社団法人 日本建築学会: 建築・都市計画のためのモデル分析の手法, 井上書院, 東京 (1992).