# アメリカンオプションの価格評価と最適行使境界

2000MM098 鵜飼 隆之　　2000MM099 宇野 拓也
指導教員　澤木勝茂

## 1　はじめに

本論文では, オプションの価格評価とアメリカンプットオプションの最適行使境界を導出する. アメリカンプットオプションは解析解が得られていないため, 近似を用いて値を算出した. 近似の手段として 2 項格子モデル・陽的有限差分法・陰的有限差分法・モンテカルロシミュレーションを用いた. 価格の収束の様子や誤差を見るためにヨーロピアンモデルの価格も導出する.

## 2　陰的有限差分法

偏微分方程式の陰解法は, 時間に関して前進差分を採用することが, 陽解法と大きな違いである. $\frac{\partial f}{\partial t}$ について後方差分の代わりに前進差分を用いると

$$\frac{\partial f}{\partial S}(t_i, S_j) = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, S_j) = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t_i, S_j) = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta S^2)} \tag{3}$$

となり, これら陽的解法と同様に代入して整理すると

$$f_{i+1,j} = a_j f_{i,j+1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j-1} \tag{4}$$

$$a_j = -\frac{\Delta t}{2\Delta S}\left(rS_j + \frac{\sigma^2 S_j^2}{\Delta S}\right) \tag{5}$$

$$b_j = 1 + \sigma^2 S_j^2 \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} + r\Delta t \tag{6}$$

$$c_j = -\frac{\Delta t}{2\Delta S}\left(-rS_j + \frac{\sigma^2 S_j^2}{\Delta S}\right) \tag{7}$$

この陰的有限差分法は陽的有限差分法とは異なり, 未知変数 $f_{i+1,j}$ が既知の値によって, 陽に表されないことから陰的 (implicit) 有限差分法とよばれる. よって, この陰的有限差分法を解くためには連立方程式を解かなければいけない. この陰的有限差分法においても陽的有限差分法と同様, 変数変換を行って計算をする. このために

$$x = \log\frac{S}{K} \qquad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \qquad s = \frac{2r}{\sigma^2} \tag{8}$$

とおき,

$$g(\tau, x) = \frac{e^{\frac{(s-1)x}{2} + \frac{(s+1)^2\tau}{4}}}{K} f(t, S) \tag{9}$$

と定義することで偏微分方程式を標準拡散方程式を変換した. 上記の変数変換を偏微分方程式に代入すると,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial \tau} \tag{10}$$

が得られる.

また, この場合のヨーロピアンプットオプションの初期条件は,

$$g(0, x) = e^{\frac{(s-1)x}{2}} - e^{\frac{(s+1)x}{2}} \tag{11}$$

境界条件に関しては,

$$\lim_{x\to-\infty} g(\tau, x) = e^{\frac{(s-1)x}{2} + \frac{(s-1)^2\tau}{4}} \tag{12}$$

$$\lim_{x\to\infty} g(\tau, x) = 0 \tag{13}$$

となる. また, アメリカンプットに関しては最適な行使境界があり, このペイオフ関数 $max(K-S, 0)$ は

$$g(\tau, x) = e^{\frac{(s+1)^2\tau}{4}} \max\left(e^{\frac{(s-1)x}{2}} - e^{\frac{(s+1)x}{2}}, 0\right) \tag{14}$$

になり, 初期条件は

$$g(0, x) = \max\left(e^{\frac{(s-1)x}{2}} - e^{\frac{(s+1)x}{2}}, 0\right) \tag{15}$$

境界条件は

$$\lim_{x\to-\infty} g(\tau, x) = e^{\frac{(s-1)x}{2} + \frac{(s-1)^2\tau}{4}} \tag{16}$$

$$\lim_{x\to\infty} g(\tau, x) = 0 \tag{17}$$

今, (10) の式を

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} \approx \frac{g_{i,j} - g_{i-1,j}}{\Delta\tau} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \approx \frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} \tag{18}$$

と近似して整理すると,

$$g_{i-1,j} = g_{i,j} - R(g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}) \qquad R = \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \tag{19}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, M) \qquad (j = 1, 2, \cdots, N-1)$$

$(N-1)$ 次の三重対角行列と $(N-1)$ 次の行列より,

$$T = \begin{pmatrix} 1+2R & -R & & & O \\ -R & 1+2R & -R & & \\ & -R & 1+2R & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -R \\ O & & & -R & 1+2R \end{pmatrix} \tag{20}$$

と, $(N-1)$ 次のベクトル

$$g_i = \begin{pmatrix} g_{i,N-1} \\ g_{i,N-2} \\ g_{i,N-2} \\ \vdots \\ g_{i,2} \\ g_{i,1} \end{pmatrix} \qquad b_i = \begin{pmatrix} g_{i,N} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{i,0} \end{pmatrix} \tag{21}$$

を定義し, この時の行列表現では,

$$Tg_i = g_{i-1} + b_i \tag{22}$$

と書くことができる. $T$ は正則なので, 初期条件と境界条件より

$$g_i = T^{-1}(g_{i-1} + b_i) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, M \tag{23}$$

これを繰り返すことにより

$$g_M = T^{-M} g_0 + \sum_{i=1}^{M} T^{-i}(t_i) b_{M-i+1} \tag{24}$$

が得られる. しかし逆行列 $T^{-1}$ を計算するのは効率が悪いので, $T$ が三角対角行列であることを着目して LU 分解をおこなって計算する.

### 2.1 計算結果

陰的有限差分法を, 変数変換をした偏微分方程式をもとにして計算した. 今, 価格の分割数は $N = 100$, 時間の分割数を $M = 100$ とした. その出力結果は,

| データ名 | 結果 |
|---|---|
| ヨーロピアンコールオプション | 16.718137 |
| ヨーロピアンプットオプション | 7.192806 |
| アメリカンコールオプション | 16.718137 |
| アメリカンプットオプション | 8.332969 |

となった.

## 3 モンテカルロ法

モンテカルロ法は簡単に述べると, 乱数を発生させ原資産の価格変動をシミュレーションし, そのオプション価格を導出する方法である.

### 3.1 ヨーロピアンオプション

モンテカルロ法では, 原資産の値動きが, 以下の式を満たしながら変動する.

標準正規乱数についての行列

$$N_i = (N_{i,1}, \cdots, N_{i,M}) \ (i = 1, \cdots, N) \tag{25}$$

を用いて

$$S_{i,j} = S_{i,j-1} + rS_{i.j-1}\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} S_{i,j-1} N_{i,j} (j = 1, \cdots, M)$$

$$M\Delta t = T$$

により発生させる. ただし

$$S_{i,0} = S_0 \ (i = 1, \cdots, N) \tag{26}$$

とし

$$S_i = (S_{i,1}, \cdots, S_{i,M}) \ (i = 1, \cdots, N) \tag{27}$$

と書くことにする. このときペイオフ関数は

$$A(S_i) = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \max\left[S_{i,j} - K, 0\right] \tag{28}$$

で与えられる. これによってオプションの価格が求められる. また, プットオプションは, 式 (7,4) を

$$A(S_i) = e^{-rT} K - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \max\left[K - S_{i,j}, 0\right] \tag{29}$$

とすればよい.

### 3.2 アメリカンプットオプション

#### 3.2.1 停止時刻型モンテカルロ法

停止時刻型モンテカルロ法とは, 停止時刻 (stopping time) が定義できるとき, 停止時刻 $\tau$ におけるペイオフを確定させるモンテカルロ法のことである. 停止時刻 $\tau$ におけるペイオフを $h(\tau)$ とすると, $\tau$ を確率変数と考えて

$$E[e^{-r\tau} h(\tau) 1_{\{\tau < T\}}] + E[e^{-rT} h(T) 1_{\{\tau \geq T\}}] \tag{30}$$

によってオプション価格を算出する. ただし定義関数 $1_{\{\tau<T\}}$ は $\tau < T$ ならば 1, それ以外は 0 となる.

#### 3.2.2 バックワード・サーチ法

まず, 時刻 0 から満期 $T$ までを離散化し, 時刻 $t_j$ における原資産の価格を

$$S_j \ (j = 0, 1, \cdots, M) \tag{31}$$

とする.

また, ある時点 $t_j$ における原資産の価格をグリッド

$$0 < S_j^1 < \cdots < S_j^g < \cdots < S_j^G \tag{32}$$

に分け, そして満期から後進的に最適行使境界を求めていく.

まず, 満期 $t_j(T)$ では行使価格 $K$ が最適行使境界の値である.

次に, 満期直前の $t_{M-1}$ における最適行使境界の値 $S_{M-1}^*$ を決定する. いま, 時刻 $t_{M-1}$, 原資産価格 $S_{M-1}^g$ における早期行使価値と持ち越し価値の差を $d(S_{M-1}^g)$ とすると

$$d(S_{M-1}^g) = \max[K - S_{M-1}^g, 0] - e^{-r(\Delta t)} E_{t_{M-1}}[P_M | S_{M-1}^g] \tag{33}$$

$$P_M(S_M) = \max[K - S_M, 0] \tag{34}$$

となり,

$$\begin{cases} d(S_{M-1}) \geq 0 \Leftrightarrow S_{M-1} < S_{M-1}^* \Leftrightarrow \text{早期行使が最適} \\ d(S_{M-1}) < 0 \Leftrightarrow S_{M-1} > S_{M-1}^* \Leftrightarrow \text{持ち越しが最適} \end{cases} \tag{35}$$

が成立する $d(S^g_{M-1}) = 0$ の点が, 最適行使境界の値 $S^*_{M-1}$ となる. 持ち越し価値の値は, 点 $(t_{M-1}, S^g_{M-1})$ の Black-Scholes のオプション評価式を利用すればよい (または, 単純モンテカルロ法).

さらに, 時点 $t_{M-2}$ における最適行使境界の値 $S^*_{M-2}$ を決定する方法を述べる. このとき, $S^*_{M-1}$ は既に求まっており, これを利用し

$$d(S^g_{M-2}) = \max[K - S^g_{M-2}, 0] \\ -e^{-r(\Delta t)} E_{t_{M-2}}[P_{M-1}|S^g_{M-2}] \qquad (36)$$

$$P_{M-1}(S_{M-1}) = \begin{cases} e^{-r(\Delta t)} P_M(S_M), & S_{M-1} \geq S^*_{M-1} \\ K - S_{M-1}, & S_{M-1} < S^*_{M-1} \end{cases} \qquad (37)$$

として,

$$\begin{cases} d(S_{M-2}) \geq 0 \Leftrightarrow S_{M-2} < S^*_{M-2} \Leftrightarrow \text{早期行使が最適} \\ d(S_{M-2}) < 0 \Leftrightarrow S_{M-2} > S^*_{M-2} \Leftrightarrow \text{持ち越しが最適} \end{cases} \qquad (38)$$

が成立する $d(S^g_{M-2}) = 0$ の点 (最適行使境界) を求める.

このとき, 各グリッドの $S^g_{M-2}$ における持ち越し価値

$$E_{M-2}[P_{M-1}|S^g_{M-2}] \qquad (39)$$

は状態 $(t_{M-2}, S^g_{M-2})$ からスタートする. 2 期間の停止時刻型モンテカルロ法より算出する.

また, 時点 $t_1, \cdots, t_{M-2}$ については, 時刻 $t_{M-2}$ と同様の操作を, 後進的に時刻 $t_1$ まで繰り返す.

### 3.3 計算結果

今, 分割数を 10000 にしたときのそれぞれの出力結果は以下のようになった.

| オプションの種類 | 結果 |
|---|---|
| ヨーロピアンコールオプション | 16.758081 |
| ヨーロピアンプットオプション | 7.268837 |
| アメリカンコールオプション | 16.758081 |
| アメリカンプットオプション | 8.326012 |

## 4 考察とまとめ

### 4.1 計算結果

本研究でプログラミングしてきた 2 項格子モデル・陽的有限差分法・陰的有限差分法・モンテカルロ法の各価格を比較する. まず, 各モデルの精度を見るために, ヨーロピアンコールの値に注目する. 価格に関する分割を $N = 1000$ で比較し, また Black-Scholes モデルのオプション評価式と各計算手法でもとめた値の誤差をもとめたところ,

| データ名 | 結果 | 誤差 |
|---|---|---|
| Black-Scholes モデル | 16.733578 | |
| 2 項格子モデル | 16.731156 | 0.002422 |
| 陽的有限差分法 | 16.734306 | -0.000728 |
| 陰的有限差分法 | 16.733535 | 0.000043 |
| モンテカルロ法 | 16.778384 | -0.044806 |

となり, 陰的有限差分法が最も誤差が小さくなり, 逆にモンテカルロ法が大きく誤差がでてしまうことがわかった. 各モデルの精度は, モンテカルロ法を除き比較的高いものであるといえる. しかし, 陽的有限差分法においては, 安定条件を考慮しなくてはいけなく, 安定条件を満たさないと値が発散してしまうという欠点がある. ちなみに価格の分割 $N = 1000$ にしたときの時間の分割は $M = 8687$ となった. 一番誤差が小さくなった陰的有限差分法においては, 陽的有限差分法でおこる安定条件を考慮しないでよいという長所もあるが, 計算方法が他の手法と比べるとかなり複雑であり, 計算結果を出力するのに最も時間がかかってしまう. モンテカルロ法の精度が低い理由は, 乱数を使用しているのが原因であり, 精度を 1 桁上げるためには, 大体 100 倍の計算量が必要になるのである.

そして次に, アメリカンプットオプションの結果を比較すると以下のようになった.

| データ名 | 結果 |
|---|---|
| 2 項格子モデル | 8.336577 |
| 陽的有限差分法 | 8.337823 |
| 陰的有限差分法 | 8.332969 |
| モンテカルロ法 | 8.356802 |

これによって, アメリカンプットの価格は大体 8.33 の値になることがわかった.

そして, 次にそれぞれの最適行使境界を示すと,

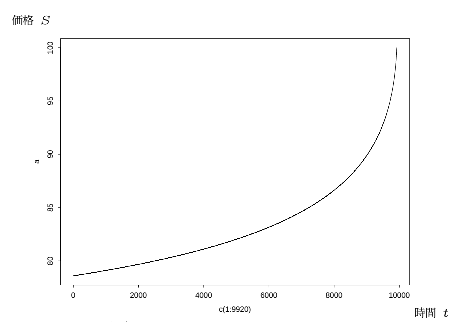



図 1　2 項格子モデルによる最適行使境界

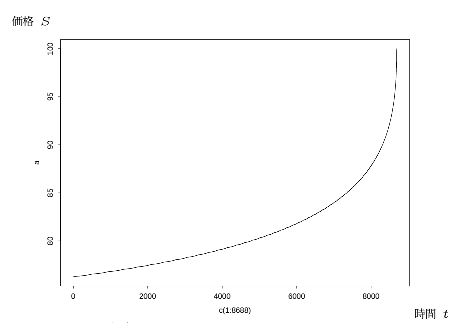



図 2　陽的有限差分法による最適行使境界

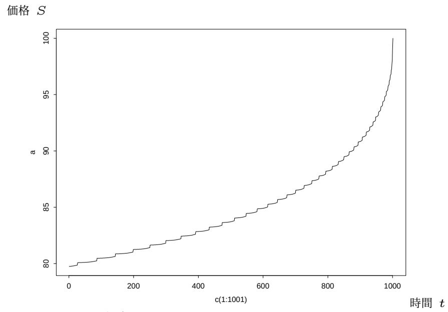



図 3　陰的有限差分法による最適行使境界

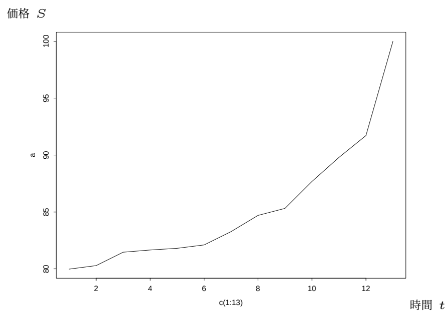
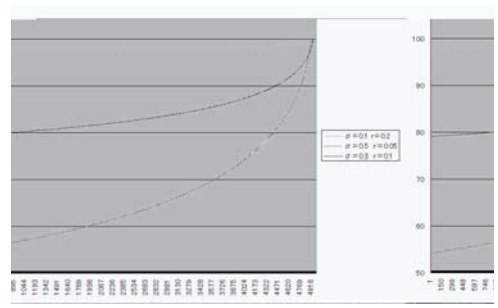



図 4　モンテカルロ法による最適行使境界



となり, 全く異なる方法を用いても, ほぼ同一の最適行使境界が導き出された．どの計算手法で導き出した最適行使境界も単調増加していった．モンテカルロ法は分かり辛いが, 値を見ると他のモデルとも大きな違いは見られない.

このことから, 様々な方法を用いても, 値の収束には違いが見られても, 結果的には, ほぼ同じ値に向かって収束している．そして最適行使境界も, ほとんど同じものであるということが分かり, 2 項行使モデル・有限差分法・モンテカルロ法は, 各々のアルゴリズムは違っても計算結果は同じような結果になるということがいえる.

次に, 無リスク利子率 $r$ とボラティリティ$\sigma$ を変動させ, 各計算手法でアメリカンプットの値を求めた．結果は以下のようになった．$N$ はそれぞれの分割数を示す.

二項格子モデル ($N = 5000$)

| $\sigma$ | $r = 0.05$ | $r = 0.10$ | $r = 0.15$ | $r = 0.20$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 2.436708 | 1.633659 | 1.177841 | 0.903171 |
| 0.2 | 6.090219 | 4.816121 | 3.898260 | 3.221082 |
| 0.3 | 9.869797 | 8.337468 | 7.135620 | 6.175039 |
| 0.4 | 13.667213 | 11.958047 | 10.558502 | 9.392994 |
| 0.5 | 17.448219 | 15.602618 | 14.051709 | 12.727768 |

この結果から $r$ が増加することにより各値は減少していき, $\sigma$ が増加していくと各値は増加していく．このことは数式においても明らかなことである．そして, それぞれの最適行使境界はそれぞれ以下のように表された. 最適行使境界においては 2 項格子モデルを取り上げた.