

# ポートフォリオ選択問題

## － 様々なモデルの比較 －

2000MM064 中島 健登

指導教員 澤木 勝茂

### 1 はじめに

この論文では、ポートフォリオ構築をサポートするためいくつかのモデルの検証を行った。またどのような投資家にどのモデルが適用できるのか検証した。

### 2 平均分散モデル

#### 2.1 平均分散モデルについて

このモデルはマルコビッツによって提唱されたモデルである。投資家の期待効用最大化を前提に作られたモデルである。2次計画問題のため組み入れ証券数が多いほど逆行列の計算に時間がかかってしまうというデメリットがある。

#### 2.2 平均分散モデルの定式化

株式:  $i (i = 1, \dots, n)$

投資比率:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

平均収益率:  $E\{R_i\} = \mu_i$

分散:  $Var\{R_i\} = \sigma_i^2$

共分散:  $Cov(R_i, R_j) = v_{ij} = E\{R_i - \mu_i\}\{R_j - \mu_j\}$

ポートフォリオ収益率:  $\mu$

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j v_{ij} \quad (1)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \mu \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (3)$$

となる。過去のデータから各証券の平均収益率と分散共分散行列を求め、上の式に代入することによって解くことができる。

#### 2.3 平均分散モデルと投資家

では実際に平均分散モデルはどのような投資家に向いているのであろうか。平均と分散という2つのパラメータでポートフォリオの最適化を行うこのモデルは投資家の期待効用最大化を目的にしているためほぼすべての投資家に適用できる。

投資する銘柄やそれらに対する投資比率は当日のワーポイントで説明する。

### 3 平均絶対偏差モデル

#### 3.1 平均絶対偏差モデルについて

平均絶対偏差モデルは、今野ら [1] が定式化したもので、リスク指標として収益の標準偏差の代わりにその絶

対値

$$MAD = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{i=1}^n (r_i(t) - r_i) x_i \right| = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |R_p(t) - R_p|$$

で定義した絶対偏差 (MAD) を用いたポートフォリオ選択問題であり、平均分散モデルが2次計画問題であるのに対し、線形計画問題に帰着されるという特徴を持っている。

#### 3.2 平均絶対偏差モデルの定式化

株式:  $i, (i = 0, \dots, n)$

第  $t$  期の収益率:  $r_i(t), (t = 1, 2, \dots, T)$

平均収益率:  $\mu_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_i(t)$

共分散:  $\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_i(t) - r_i)(r_j(t) - r_j)$

投資比率:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

ポートフォリオ期待収益率:  $\mu$

$$\min MAD = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{i=1}^n (r_i(t) - r_i) x_i \right| \quad (4)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^n r_i x_i \geq \mu \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (6)$$

$$x_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

$$x \in X \quad (8)$$

#### 3.3 平均絶対偏差モデルと投資家

このモデルは、平均分散モデルの改良モデルとして今野ら [1] が導き出したものである。このモデルは平均分散モデルでは困難であった逆行列の計算をする必要がなく、線形計画問題として解くことができるため組み入れ証券数が多くても容易に計算することができる。組み入れ証券数が多い投資家、つまり機関投資家などに適用できるモデルである。

投資する銘柄やそれらに対する投資比率は当日のワーポイントで説明する。

### 4 下方リスクモデル

#### 4.1 下方リスクとは

下方リスク指標の代表的なものは、2次モーメントの分布の左側だけをとった下半分散、下半分散の平方根をとった下半標準偏差、分布の左側だけの絶対値をとった下半絶対偏差がある。

#### 4.2 2次確率優越について

下方リスクは2次確率優越から導出される。2つの確率変数  $Z_1, Z_2$  があるとき、その分布関数  $F_1(Z), F_2(Z)$  は

$$2 \text{ 次分布関数 } F^{(2)}(Z) = \int_{-\infty}^Z F(\eta) d\eta$$

$F_1^{(2)} \leq F_2^{(2)}$  という関係を  $Z_1 \geq_{SSD} Z_2$  と書き、 $Z_1$  は  $Z_2$  に2次確率優越するという。

次に効用関数と2次確率優越について説明する。 $U'(R) \geq 0, U''(R) \leq 0$  のとき

$$E[U(Z_1)] \geq E[U(Z_2)]$$

の必要十分条件は  $Z_1 \geq_{SSD} Z_2$  である。

#### 4.3 2次確率優越から下方リスクの導出

平均下半  $k$  次モーメントモデルを定式化すると、

$$\begin{aligned} \max r(x) - \lambda \sigma_k(x) &= E[R(x)] - \lambda x \{E[|R(x) - r(x)|^k]\}^{\frac{1}{k}} \\ \text{s.t.} \quad e^T x &= 1, x \geq 0 \end{aligned}$$

である。 $\lambda \geq 0$  はリスク回避度である。 $k=1$  のとき平均下半絶対偏差モデル、 $k=2$  のとき平均下半標準偏差モデルである。

#### 4.4 下方リスクモデルの定式化

株式:  $i, (i=0, \dots, n)$

第  $t$  期の収益率:  $r_i(t), (t=1, 2, \dots, T)$

平均収益率:  $\mu_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_i(t)$

共分散:  $\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_i(t) - r_i)(r_j(t) - r_j)$

投資比率:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

ポートフォリオ期待収益率:  $\mu$

$$\min \left\{ \begin{array}{l} V^-[X] = E[\{(X - E[X])^-\}^2] \\ \sigma^-(X) = E[|(X - E[X])^-|] \\ MAD^-(X) = E[|(X - E[X])^-|] \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n r_i x_i \geq \mu \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (11)$$

$$x_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

$$x \in X \quad (13)$$

#### 4.5 下方リスクモデルと投資家

この特徴からこのモデルはなんらかの目的がある投資家、例えば機関投資家やファンドマネージャー、将来に消費の予定がある人がその資金のために運用するなど投資の結果、現在の資産よりも増やしたいなどの目的を持った投資家に適用される。

投資する銘柄やそれらに対する投資比率は当日のワークポイントで説明する。

## 5 経済成長率モデル

### 5.1 リスク指標

本論文ではリスク指標として用いるのは日本の経済成長率 (Economic Growth Rate) である。このモデルにおいてリスクとなるのは経済成長がマイナスの値をとることである。経済が成長していなければ、株価は下がることが予想でき、株価が下がることは投資家にとってリスクである。

### 5.2 計算方法

過去1990年から2003年(2003年は予測値)までの経済成長率のデータから、経済成長率の推移の上昇と下降が2~3年の周期で入れ替わっていることがわかる。データから前々年、前年が上昇(または下降)している場合、その年が下降をする確立は  $\frac{8}{11}$  である。平均分散モデルによって求められた投資比率から上で求めた確率を用いて投資銘柄数を選択する。

### 5.3 経済成長率モデルと投資家

このモデルは日本経済の動きに応じてポートフォリオ構築するモデルである。つまり対象となる投資家は、日本の株式に投資をしている人である。しかし外国株に投資している人にもこのモデルは適用できる。なぜならこのモデルを参考に日本株と外国株の比率を考慮することができよう。

投資する銘柄やそれらに対する投資比率は当日のワークポイントで説明する。

## 6 終わりに

4つモデルによるポートフォリオの最適化を行った。数値計算の結果、どのモデルも資産運用に有用であることが明らかになった。しかし実際の市場においてはもっと様々なリスクが存在し、それらのリスクすべてをパラメータとして取り扱うことは容易ではない。

## 謝辞

本研究を行うにあたり、絶えず御指導と御鞭撻を賜った澤木勝茂教授に心より感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] 今野浩, 『理財工学』, 日科技連, 1995.
- [2] 田畑吉雄, 『金融工学入門』, エコノミスト社, 2002.
- [3] 甲斐良隆, 『資産運用とリスクマネジメント』, エコノミスト社, 2002.
- [4] 竹原均, 『ポートフォリオの最適化』, 朝倉書店, 1997.