待ち行列理論による同種レンタル商品の最適個数とレンタル方法

2000MM061 明城 伸幸
指導教員　澤木 勝茂

1　はじめに

ＣＤやビデオなどの商品を貸し出して商売をするレンタル業の最適品揃えについて本論文では研究する [1]。実際に行列をつくる場合は、早く来た客からサービスを受けることが出来るが、レンタル店では、商品が全てレンタル中の状態から返却がありレンタル可能になったときにタイミング良く借りに来た客が借りられるという無作為選択サービスである。利用率の変化に対する商品の最適数と先着順法と無作為選択の違いを解析・考察する。

2　モデルの設定

この章では、客は平均到着率 λ(人／時) のポアソン到着するものとし、サービスは平均サービス (利用) 率 μ(人／時) の指数サービス時間に従う M/M/s のモデルを用いて、レンタル店の待ち行列をモデル化する。

λ: ある商品の平均来客率⇒商品の人気度を表す
μ: ある商品の平均利用時間　　s: 同種の商品数
α: 再来店する確率　⇒立地条件の善し悪しを表す

2.1　モデル１：無作為選択サービス

経営者は何人待たせているか把握できず、利用者は長時間待つ場合もあれば短時間の場合もある。

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & (0 \le n < s) \\ \alpha\lambda & (s \le n) \end{cases} \quad P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s}{(s-1)!(s-\alpha a)} \right\}^{-1} \tag{1}$$

$$L_{1q} = \frac{\alpha\lambda^{s+1}}{\mu^{s-1}(s-1)!(s\mu-\alpha\lambda)^2} P_0 \tag{2}$$

$$L_1 = aP_0 \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{\alpha a^s}{(s-1)!(s-\alpha a)} \right\} + L_{1q} \tag{3}$$

2.2　モデル２：先着順サービス (待ちリストに制限有り)

待ちリストを作成し、レンタル待ち行列を管理する。後方の客は長時間待つことが確実なので、あらかじめ１商品当たり k 人の ks 人までと制限する。

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s\left\{1-(\alpha\rho)^{(k-1)s+1}\right\}}{s!(1-\alpha\rho)} \right]^{-1} \tag{4}$$

$$L_{2q} = \frac{\alpha\rho a^s}{s!(1-\alpha\rho)^2} P_0 \times \left[1-\{(k-1)s+1\}(\alpha\rho)^{(k-1)s} + (k-1)s(\alpha\rho)^{(k-1)s+1}\right] \tag{5}$$

$$L_2 = aP_0 \left[\sum_{n=0}^{s} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s}{s!} \left(\frac{\alpha\left\{1-(\alpha\rho)^{(k-1)s}\right\}}{1-\alpha\rho} - 1 \right) \right] + L_{2q} \tag{6}$$

2.3　モデル３：先着順サービス (待ちリストに加わらない人がいる)

制限は無いが、レンタル待ちの客が順番を知り、加わるかを判断するので、確率的に待ちリストから離れていってしまう場合である [3]。 γ はリストに加わる確率を表すのに用いる変数である。

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & (0 \le n < s) \\ \frac{\alpha\lambda}{\gamma(n-s+1)} & (s \le n) \end{cases} \quad P_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s e^{\frac{\alpha\rho}{\gamma}}}{s!} \right)^{-1} \tag{7}$$

$$L_{3q} = \frac{\alpha\rho a^s e^{\frac{\alpha\rho}{\gamma}}}{s!\gamma} P_0 \tag{8}$$

$$L_3 = P_0 \left\{ a \sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s\left(e^{\frac{\alpha\rho}{\gamma}}-1\right)}{(s-1)!} \right\} + L_{3q} \tag{9}$$

3　利用率による最適同種商品数

C_1：レンタル料金　　C_2：一人の客を失った損失
$L-L_q$: 平均レンタル数
$S-(L-L_q)$: 平均未レンタル数
L_f : 再来店率が $1-\alpha$ 時の L_q : 再来店しない平均人数

期待利益 : $P_i(s) = C_1L_i - [C_1\{s-(L_i-L_{iq})\} + C_2L_{if}]$
（ i : モデル＝１，２，３）　(10)

μ =1/30(人/時)、$C_1 = 200$(円)、$C_2 = 250$(円) と設定し、モデル２の k=5、モデル３の $\gamma = 1$ とする。

4　レンタル方法による比較

無作為選択と先着順の M/M/ｓ の２方法における時刻 ｔ より永く待つ確率を比較する。ここで、$u = \mu st$、Π ＝全ての商品がレンタル中の確率であり、無作為選択時の $F(u)$ はリオーダン (J.Riordan) が与えた図表より求める [2]。

$$\Pi = \sum_{n=s}^{\infty} P_n = 1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n = \frac{a^s}{(s-1)!(s-\alpha a)} P_0 \tag{11}$$

・無作為選択 : $P(r > t) = \Pi F(u)^{*1}$　(12)

・先着順 : $P(r > t) = \Pi F(u) = \Pi e^{-(1-\rho)u}$　(13)

表２の商品数 s は第３節の収益が最大になる個数。

4.1　策１：利用率より一定時間待つ確率を考慮した場合

利用率 $\alpha\rho \ge 0.9$ の商品に余剰商品を１つ加える。

4.2　策２：平均待ち時間 W_q を考慮した場合

平均待ち時間 $W_q \ge 20$(時間) の商品に余剰商品を１つ加える。

5　２つのサービス提案と公共施設の最適商品数

5.1　リストに加わる時に予約手数料がある場合

予約手数料制後の再来店率を α'、手数料を C_3、その時の平均系内数等を L_i', L_{iq}', L_{if}' とすると、期待利益は以下のようになり、以下の(１４)式から予約制前の(１０)式を引いた値が正ならば、この制度が成功と言える。第４節より、$\alpha\rho$ が大きい時、長時間客を待たせてしまうことが判っているので、$\alpha\rho < 0.9$ の条件で解析を行う。

$$P_i'(s) = C_1 L_i' + C_3 L_{iq}' - \Big[C_1\{s - (L_i' - L_{iq}')\} + C_2 L_{if}'\Big] \quad (14)$$

5.2　早期返却割引制導入の場合

早期返却者に対し C_4 円割引きすることで、β の確率で利用者が早期返却し、平均利用時間が μ'' となり、その時の平均系内数等を $L_i'', L_{iq}'', L_{if}''$ とすると、期待利益は以下のようになり、以下の(１５)式から早期返却割引制度前の(１０)式を引いた値が正ならば、この制度が成功と言える。5.1 節同様、$\alpha\rho < 0.9$ の条件で解析を行う。

$$P_i''(s) = \beta\Big((C_1 - C_4)L_i'' - [(C_1 - C_4)s - (L_i'' - L_{iq}'') + C_2 L_{if}'']\Big) + (1-\beta)\Big(C_1 L_i - [C_1 s - (L_i - L_{iq}) + C_2 L_{if}]\Big) \quad (15)$$

5.3　公共の図書館の場合

公共の図書館では設定できないので、(１３)式より $P(r > t)$ を求め、$P(r > t) \leq \xi$ となる最小の s が最適商品数とする。$\lambda = $ (人/日)、t = (日)、又、$\mu = $１/１３ (人/日)、$\alpha = $０．９と設定する。

6　解析結果 (右図)

7　おわりに

期待利益の点からだけでは、再来店しても借りられない確率が高いので、余剰商品を陳列する事で待ち時間を大きく下げられる。また、無作為選択法では、どれ位利用者を待たせているのか把握できないので、α の大きい店舗程、余剰商品を陳列しなければ大人数の利用者を待たせることになる。加えて、$\alpha > 0.5$ では、最高期待利益と平均待ち時間 $W_q < 20$ 時間の２条件の両立は困難で、ほぼ全ての商品に余剰商品が必要となり、$\alpha \leq 0.5$ では、２条件を満たす商品も多いが、稀に平均待ち時間 W_q が極端に大きい商品が出て来る事に気を配る必要がある。また、手数料制導入時の境界線がはっきりと出たのに対し、早期返却割引制導入では、店舗敷地が狭く、余剰商品の許されない店舗では、あまり利益が期待できない。また、平均待ち時間を評価基準とした公共の図書館で１種１・２冊の本は $\lambda \leq 1/20$ の条件下の本である。

参考文献

[1] 澤木勝茂・小和田正・加藤豊 ：ＯＲ入門 -意思決定の基礎- , 実数出版 (1984).

[2] 森村英典・大前義次 ：応用待ち行列理論, 日科技連社 (1975).

[3] 市東和夫・中田広光・八幡誠 ：基礎 微分積分 , 産業図書 (1999).

表１　３節：利益計算の結果

λ	α	モデル１ $P_1(s)$	モデル２ $P_2(s)$	モデル３ $P_3(s)$
0.1	0.2	[1]309.61	[1]875.97	[3]586.83
	0.5	[3]265.72	[2]743.99	[3]594.95
	0.8	[3]995.12	[3]594.23	[3]651.74
0.3	0.2	[2]2133.05	[3]1858.90	[7]1882.61
	0.5	[9]1122.14	[5]1394.98	[8]1855.02
	0.8	[8]2859.39	[8]2042.20	[8]1871.54
0.5	0.2	[4]1274.60	[4]4992.79	[12]3200.13
	0.5	[12]1920.75	[9]4188.04	[12]3138.04
	0.8	[13]4517.86	[13]3468.89	[20]11568.9

表２　４節：２方法の比較結果

λ	α	s	無作為選択 (t) 12	24	48	先着順 (t) 12	24	48
0.4	0.5	12	.0331	.0073	.0004	**.0301**	**.0027**	**.0001**
	0.7	9	**.5991**	**.4471**	**3130**	.7034	.5533	.3424
0.6	0.5	12	**.1821**	.0874	.0240	.2194	**.0661**	**.0060**
	0.7	13	**.7373**	**.5899**	**.4916**	.8378	.7139	.5184
0.8	0.5	13	**.5663**	**.3905**	.2441	.6544	.4387	**.1971**
	0.7	17	**.8751**	**.8001**	**.6500**	.9232	.8522	.7262

表３　４．１節：$\alpha\rho \geq 0.9$ の商品に余剰商品を加えた結果

0.4	0.7	10	**.2737**	**.1752**	.0803	.3849	.2030	**.0564**
0.6	0.7	14	**.4375**	**.2486**	.1253	.5680	.3244	**.1059**
0.8	0.5	14	**.3482**	**.1890**	.0796	.4470	.2009	**.0406**
	0.7	18	**.5453**	**.3470**	.2181	.6135	.3796	**.1415**

表４　４．２節：$W_q \geq 20$ の商品に余剰商品を加えた結果

$\alpha \diagdown \lambda$	0.4	0.6	0.8
0.7	[10]2489.65	[14]4016.64	[18]5902.32

表５　５．１節：予約制の利益計算結果

α'	$\alpha(C_3 = 5)$ 0.5	0.7	$\alpha(C_3 = 10)$ 0.5	0.7
0.4	[10]-110.335	[10]-738.806	[10]-109.661	[10]-738.132
0.5	[9]1.832	[9]-626.639	[9]3.664	[7]-624.807
0.6	[7]456.097	[7]-172.374	[7]468.120	[7]-160.351
0.7	[8]640.642	[8]12.171	[8]652.814	[8]24.343

表６　５．２節：早期返却割引制度の利益計算結果

μ''	$\beta(C_4 = 5)$ 0.4	0.6	$\beta(C_4 = 10)$ 0.4	0.6
1/25	[7]14.650	[7]21.975	[7]-8.034	[7]-12.052
1/26	[7]201.548	[7]302.321	[7]174.139	[7]261.208
1/27	[8]-68.280	[8]-102.420	[8]-88.837	[8]-133.255
1/28	[8]21.283	[8]31.924	[8]-1.577	[8]-2.365
1/29	[8]146.738	[8]220.107	[8]120.690	[8]181.035
1/30	[9]-21.734	[9]-32.601	[9]-43.467	[9]-65.201

表７　５．３節：公共の図書館の本を待つ確率

t	ξ	λ 1/100	1/30	1/20	1/10	1/5
4	0.1		[2].0459		[3].0913	[5].0600
	0.3	[1].0978		[2].0991		[4].1899
	0.5		[1].3443		[2].3637	
7	0.1		[2].0316	[2].0715	[3].0598	[5].0325
	0.3	[1].0798	[1].2991			[4].1295
	0.5			[1].4881	[2].3003	[3].4599
14	0.1		[2].0133	[2].0334	[3].0223	[4].0530
	0.3	[1].0496	[1].2153		[2].1921	
	0.5			[1].3904		[3].3223
21	0.1		[2].0056	[2].0156	[3].0083	[4].0217
	0.3	[1].0308	[1].1550		[2].1229	[3].2259
	0.5			[1].3122		