スーパーの食料品売場のレジにおける待ち行列の解析

2000MM058 森雅俊

指導教員　澤木勝茂

1　はじめに

スーパーマーケットの食料品売場のレジの前に買物を終えた買物客が並んでいる。私はこのレジの行列が待ち行列に使えるのではないかと思いこの研究を始めた。

並んでいる列に後ろから並ぶと、並び始めてからレジでサービスを済ますまでに時間がかかる。また、サービス中の客や、サービスをしている従業員の行動力が鈍かったり、従業員が複数の客のサービスをしたりするとさらに時間がかかってしまう。

そこで本論文では、レジに並んでいる客に対し効率的にサービスを受けられるように、クイックカウンターを設置したモデルを作り、クイックカウンターのないモデルと比較する。また、クイックカウンターを設置したモデルで、クイックカウンターが 1 つのときと 2 つのとき、瞬間的鞍替えがあるときとないときの 2 つにおいて、どちらが客に対し効率的にサービスを受けられるかを比較する。そして、これら 4 種類のモデルについて考察する。ただし、ここでいうクイックカウンターは、購入した品目が 10 品目以下のときに並ぶカウンターをいう。

2　モデルの説明

モデル 1 はカウンターが 2 つの普通のカウンターのみで構成されている場合、モデル 2 は普通のカウンターとクイックカウンターが 1 つずつ設置されていて、鞍替えがない場合、モデル 3 は普通のカウンターにクイックカウンターが 2 つ向かい合って設置されていて、鞍替えがない場合、モデル 4 は普通のカウンター 1 つ、クイックカウンター 2 つで構成されていて、2 つのクイックカウンターの間に瞬間的鞍替えがある場合とする。ただしモデル 1 、2 のカウンターの数は 2 つ、モデル 3、4 のカウンターの数は 3 つとする。

3　記号の説明

λ:平均到着率

μ:モデル 1 における普通のカウンターのサービス率

μ_1:モデル 2〜4 における普通のカウンターのサービス率

μ_2:モデル 2〜4 におけるクイックカウンター 1 のサービス率

μ_3:モデル 2〜4 におけるクイックカウンター 2 のサービス率

ρ:モデル 1 におけるカウンターの利用率 $(\rho = \lambda/\mu)$

ρ_1:モデル 2〜4 における普通のカウンターの利用率 $(\rho_1 = \lambda/\mu_1)$

ρ_2:モデル 2〜4 におけるクイックカウンターの利用率 $(\rho_2 = \lambda/\mu_2)$

ρ_3:モデル 2〜4 におけるクイックカウンターの利用率 $(\rho_3 = \lambda_3/\mu_3)$

L:システム内の平均買物客数

L_q:待っている買物客の平均数

W_q:レジでの平均待ち時間

4　モデルの定式化

4.1　モデル 1

このモデルは、カウンターは普通のカウンター 2 つだから、到着分布は平均 λ のポアソン分布、サービス分布は平均 $1/\mu$ の一様分布に従う先着順待ち行列 M/G/1 に等しい。

システム内の買物客の平均数 L は、

$$L = \rho + \frac{\rho^2+\lambda^2\sigma_v^2}{2(1-\rho)} \qquad (1)$$

である。また、待っている客の平均数 L_q は

$$L_q = \frac{\rho^2+\lambda^2\sigma_t^2}{2(1-\rho)} \qquad (2)$$

である。また関係式、

$$L = E(n_0) = \lambda E(w+v) = \lambda E(w) + \lambda E(v) = \lambda W_q + \rho \qquad (3)$$

から、平均待ち時間 W_q は、

$$W_q = \frac{1}{\lambda}(L-\rho) = \frac{\rho^2+\lambda^2\sigma_v^2}{2\lambda(1-\rho)} \qquad (4)$$

である。

4.2　モデル 2

このモデルは、普通のカウンターとクイックカウンターの 2 つからなるモデルで、M/M/1 と M/G/1 の合成待ち行列モデルである。普通のカウンターについてはモデル 1 と同じである。また、クイックカウンターについて、このカウンターは到着分布が平均 λ のポアソン分布、サービス分布が平均 $1/\mu$ の指数分布に従う先着順待ち行列モデル M/M/ 1 である。

平衡状態において、系の中に n 人の客がいる確率を P_n とするとシステム内の平均買物客数 L_y は、

$$L_2 = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \qquad (5)$$

である。また系の中に客が n 人いるならば、そのうちで 1 人はサービス中、残りの (n-1) 人がサービスを受けるために待っているから、待っている買物客の平均数 L_{qy} は、

$$L_{q2} = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2} \qquad (6)$$

である。

また、レジの平均待ち時間 W_{qy} と待っている買物客の平均数 L_{qy} との間には、

$$L_{q2} = \lambda W_{q2} \quad (7)$$

という関係、すなわちリトルの公式がある。この公式を使って、

$$W_{q2} = \frac{1}{\lambda} L_{q2} = \frac{\lambda}{\mu_2(\mu_2 - \lambda)} \quad (8)$$

が導き出される。

従って、このモデルにおける待っているシステム内の平均買物客数 L_{1+2}、買物客の平均数 $L_{q(1+2)}$、平均待ち時間 $W_{q(1+2)}$ はそれぞれ、

$$L_{1+2} = \frac{L_1 + L_2}{2} \quad (9)$$

$$L_{q(1+2)} = \frac{L_{q1} + L_{q2}}{2} \quad (10)$$

$$W_{q(1+2)} = \frac{W_{q1} + W_{q2}}{2} \quad (11)$$

となる。

4.3 モデル 3

普通のカウンターはモデル 1、2 と同じである。クイックカウンターは 2 つ向かい合って並んでいるから、M/M/2 モデルである。クイックカウンターにおけるシステム内の平均客数 L、待っている客の平均数 L_q、クイックカウンターの平均待ち時間 W_q は以下のようになる。

$$L_2 = L_3 = L_q + a = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (12)$$

$$L_{q2} = L_{q3} = \frac{\lambda\mu(\frac{\lambda}{\mu})^2}{(2\mu - \lambda)^2} P_0 \quad (13)$$

$$W_{q2} = W_{q3} = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{\mu(\frac{\lambda}{\mu})^2}{2\mu - \lambda} P_0 \quad (14)$$

(ただし、$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^2}{(2-a)}}$ である)

よってこのモデルにおける待っているシステム内の平均買物客数 L_{1+2+3}、買物客の平均数 $L_{q(1+2+3)}$、平均待ち時間 $W_{q(1+2+3)}$ はそれぞれ、

$$L_{1+2+3} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{3} \quad (15)$$

$$L_{q(1+2)} = \frac{L_{q1} + L_{q2} + Lq3}{3} \quad (16)$$

$$W_{q(1+2)} = \frac{W_{q1} + W_{q2} + W_{q3}}{3} \quad (17)$$

となる。

4.4 モデル 4

常に短い方に鞍替えするので、時刻 t において、カウンター 2 に x 人、カウンター 3 に y 人、並んでいる確率 (サービス中の客を含む) を $Q_{x,y}(t)$ とおくと、起こり得る状態は $Q(y,y)$、$Q(y,y+1)$、$Q(y+1,y)$ の 3 つになるから、2 つのクイックカウンターにおける平均系内数 L_2、L_3、待っている客の平均数 L_{q2}、L_{q3}、平均待ち時間 W_{q2}、W_{q3} は以下のようになる。

$$L_2 = \frac{\lambda\rho[\mu_3(\rho^3 - \rho^2 + 2\rho + 2) + \mu_2\rho(2 + 3\rho - \rho^2)]}{2(1+\rho)(1+\rho^2)(\lambda^2 + 2\mu_2\mu_3(1-\rho))} \quad (18)$$

$$L_3 = \frac{\lambda\rho[\mu_2(\rho^3 - \rho^2 + 2\rho + 2) + \mu_3\rho(2 + 3\rho - \rho^2)]}{2(1+\rho)(1+\rho^2)(\lambda^2 + 2\mu_2\mu_3(1-\rho))} \quad (19)$$

$$L_{q2} = L_2 + \rho \quad (20)$$

$$L_{q3} = L_3 + \rho \quad (21)$$

$$W_{q2} = \frac{L_2 - \rho}{\lambda} \quad (22)$$

$$W_{q3} = \frac{L_2 - \rho}{\lambda} \quad (23)$$

また、このモデルにおけるシステム内の平均買物客数 L_{1+2+3}、買物客の平均数 $L_{q(1+2+3)}$、平均待ち時間 $W_{q(1+2+3)}$ はモデル 3 と同じである。

5 考察

レジのサービス率を固定したとき、4 つのモデルを比べて、モデル 4 の方が、他の 3 つのモデルよりも平均系内数や待っている客の平均数、平均待ち時間の値が大きいことがわかる。さらに、モデル 3 が 4 つのモデルの中で最も平均待ち時間の上げ幅が小さいこともわかった。また、平均到着率を固定したときも、モデル 4 の方が、他の 3 つのモデルよりも平均系内数や待っている客の平均数、平均待ち時間の値が小さいことがわかった。つまり、鞍替えをすることにより、客へのサービスが効率的になることがわかった。

6 おわりに

モデルの定式化で最も苦労した点は、従来の待ち行列モデルを現実のスーパーのサービス改善にどう反映させるかということや、数値計算のときに何度も計算をし直していたので、かなり大変だったことの 2 点である。また、最初予定していた列の長さに依存した鞍替えのある待ち行列はかなり難しかったのでできなかったが、瞬間的鞍替えが鞍替えのあるモデルの研究にかなり役立つだろうと思う。そして、クイックカウンターの設置も客に対して効率のよいサービスを受けられる方法だと思う。

謝辞
本論文の作成ならびに、指導教員として二年間御指導してくださった澤木勝茂教授に深く感謝の意を表す。

参考文献

[1] 新美智子：鞍替えのある待ち行列, 1995 年度南山大学経営学部情報管理学科卒業論文要旨集 (1996,3).
[2] 本間鶴千代：待ち行列の理論, 理工学社 (1966).
[3] 小和田正、澤木勝茂、加藤豊：OR 入門 -意志決定の基礎- , 実教出版 (1984).
[4] 内藤基之： 待ち行列理論による信号交差点の右折レーン評価, 2002 年度南山大学経営学部情報管理学科卒業論文要旨集 (2003,3).