

診療所の待ち行列について

2000MM057 毛利 公一

指導教員 澤木 勝茂

1 はじめに

待ち行列の中でも典型的なものが診療所の待ち行列である。

そこで、診療所の待ち行列がどのようなモデルによって表せられるかということ調べ、また、待ち行列がシステム次第で短くなるという改善案がないかどうか調べていく。

2 取り扱う具体的内容

ここで取り扱うモデルは、到着のしかたがランダム、つまりポアソン分布でサービスが指数分布に従う窓口 S 個の $M/M/S$ モデルとする。

厳密に言えば窓口ごとにサービス時間分布は異なると考えられる(熟練者と新人など)ここでは、サービス時間分布はどの窓口に対しても同じとする。また、システムの容量は制限を設けないものとする。

2.1 記号の説明

- : 平均到着率
- μ : 平均サービス率
- : 窓口利用率
- P_q : 待たされる確率
- $P_n(t)$: 時刻 t で系の中に n 人いる確率
- L : 系内にいる平均客数
- L_q : 待ち行列の平均の長さ
- W : 系内で過ごす時間の平均
- W_q : 平均待ち時間

3 問題の定式化

3.1 一般の診療所の待ち行列

一般の診療所というのは、風邪を引いたときや、怪我をしたときにいく病院などのことで、特殊な場合を考えない場合には、これらは到着の仕方がランダム、つまりポアソン分布で、サービス時間が指数分布に従う窓口 S 個の $M/M/s$ モデルで表すことができる。

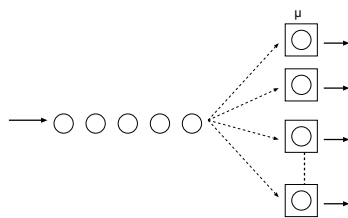


図1 M/M/S モデルの図

$$P_n = \frac{a^n}{n!} P_0, \quad 0 \leq n \leq s \quad (1)$$

$$P_n = \frac{a^n}{s! s^{n-s}} P_0 = \frac{s^{s-n}}{s!} P_0, \quad 1 \leq n < s \quad (2)$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s}{(s-1)!(s-a)}} \quad (3)$$

$$L_q = \frac{\lambda \mu a^s}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} P_0, \quad (4)$$

$$L = L_q + a, \quad (5)$$

$$W_q = \frac{\mu a^s}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} P_0 = \frac{L_q}{\lambda}, \quad (6)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}, \quad (7)$$

3.2 非割込み優先方式

ここで扱うものはより一般的なモデルとして非割込み優先方式のモデルを扱っていく。非割込み優先方式とは、各クラスごとに優先順位をつけ優先順位の高いものから待ち行列の先頭に並んでいく方式である。

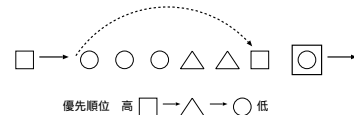


図2 非割込み優先方式モデル

モデルを作るにあたって、ここでは、全体の待ち行列の長さや、全体の平均待ち時間については求めて行かない。というのは、これらは優先順位による影響がまったくないからである。つまり、非割込み優先方式モデルの全体の待ち行列の長さや、全体の平均待ち時間については $M/M/S$ モデルと全く同じになる。

だが、並ぶ順番が変わるということは、全体の平均には影響を与えなくても、分布は変わる。

そこで、ここでは、優先権のクラスごとの平均待ち時間を求めて行く事にする。

r 種類の優先順位があるとして数の少ない程優先度が高いとする。

到着率: λ_k ($k=1,2, \dots, r$)

サービス率: $\mu_k = \mu$

優先度 p のある客について考え、彼が時刻 t_0 でこのシステムに到着し、時刻 t_1 でサービスを受け始めたとする。そうすると $T=t_1-t_0$ が彼の待ち時間になる。 t_0 において、サービス中の客のサービスの残り時間を T_0, t_0 のとき既に行列の中にある各グループ (それぞれ n_k 人) のサービス時間の、グループごとの総和を、 T_k, T という時間内に到着した優先度 k の客 n'_k 人のサービス時間の総和を T'_k とおく。そうすると、優先度 p の客の待ち時間は、今サービス中の客の残り時間と、自分より前に到着している自分と同じ以上の優先度の高い客のサービス時間、および、待っている間にやって来た自分より優先度の高い客のサービス時間の総和となるから、

$$W_p = E(T) = \sum_{k=1}^{p-1} E(T'_k) + \sum_{k=1}^p E(T_k) + E(T_0) \quad (8)$$

$$E(T_k) = \frac{1}{s\mu_k} \lambda_k W_k \quad (9)$$

$$E(T'_k) = \frac{1}{s\mu_k} \lambda_k W_p \quad (10)$$

$$W_p = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\lambda_k}{s\mu} W_p + \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{s\mu} W_k + E(T_0) \quad (11)$$

$$W_p = \frac{E(T_0)}{(1 - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\lambda_k}{s\mu})(1 - \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{s\mu})} \quad (12)$$

$$E(T_0) = \frac{a^s}{s!\mu(s-a)\{\sum_{n=1}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s}{(s-1)!(s-a)}\}} \quad (13)$$

3.3 中断式割り込み優先方式

非割り込み優先方式に対して中断式割り込み優先とは、優先権の無い客のサービス中に優先権のある客が到着した場合、優先権のある客は、サービス中の客を列に戻して直ちにサービスを受けることができることである。このさい、優先権を持っている客がサービス中のときに到着した客は待ち行列をつかってサービス終了まで待たされる。また、サービス中にそのサービスを中断された優先権の無い客は、行列の先頭に戻り、優先権のある客のサービス終了後に直ちにサービスを受け直す。そのさい、前に受けていたサービスの残り時間だけサービスを受けなければならない。

このモデルは、診療所では、急患などがでる病院などがこれにあてはまる。

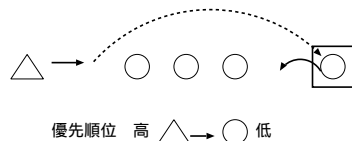


図3 中断式割り込み優先方式モデル

3.4 予約がある場合のモデル

ここでは、予約がある場合の待ち行列について考える。主に、診療所では歯医者などがこれにあたる。

分かりやすいように、予約客と一般客の時間を交互に繰り返し、また、それぞれの時間を共に t として考えていく。また、予約客に空きは無いとして求めていく。

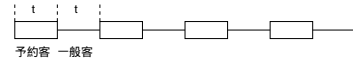


図4 予約がある場合のモデル

考えるにあたって、予約客はレギュラー到着とし、一般客のみを考えていく。そして、ここでは平均待ち時間を求めていくことにする。

客が時刻 t_0 にやってきたとすると、それが、予約客のサービス時間中であった場合と一般客のサービス時間中であった場合の2種類に分けて考える必要がある。

まず、客がやって来た時刻が予約客のサービス時間中であった場合、 $0 \leq \alpha \leq 1$ とすれば、

$$E(2t-1) = \frac{1}{s\mu} \lambda W_q + \alpha \frac{\lambda}{s\mu} (t-t_0) \quad (14)$$

客がやって来た時刻が一般客のサービス時間中であった場合には、

$$E(2t) = \frac{1}{s\mu} \lambda W_q + \frac{1}{s\mu} (1 - \frac{\lambda}{s\mu}) \quad (15)$$

となる。

4 おわりに

本研究をまとめると、診療所の待ち行列には様々な種類があったが、どれももとは $M/M/S$ モデルを元にしていて、診療所の種類によっての待ち行列の長さや、平均待ち時間などといったものは、ほとんど変化がなかった。

また、分散などを小さくするために2つの改善案を出したが、今の待ち行列の状態を打破するものとはいかなかった。それは、先着順の $M/M/S$ モデルの分散が右下がりの直線となり、普段、待ち行列をなすときのもっとも一般的な形である、先着順のモデルが、かなり合理的な方式であるからである。

窓口を増やさずに待ち時間などが短くなるモデルを作ることが今後の課題となっていくであろう。

参考文献

- [1] 澤木勝茂, 小和田正, 加藤豊: OR 入門, 実教出版 (1984).
- [2] 桐山光弘: 待ち行列が分かる本, 日刊工業新聞社 (1997).
- [3] 森村英典, 大前義次: 応用待ち行列理論, 日科技連出版社 (1975).