瀬戸キャンパスにおける食堂の待ち行列解析

2000MM056 森 弘隆

指導教員　澤木 勝茂

1　はじめに

生活の中で, サービスを受けるために人々が行列をつくるのはよくみかける．その中でも, 瀬戸キャンパスにおける食堂の待ち行列は最も身近な問題である．瀬戸キャンパスの食堂は昼食のラッシュ時間になると長い行列をつくり, 多くの学生が待たされているのをみかける．この行列を短くすれば, 食事を買うまでの時間が短くなり多くの学生が食堂を利用するようになる．食堂のサービス状況は, 食事を受け取るカウンターと買うためのレジで待ち行列が存在するため, どちらか一方でも行列ができてしまうと食事を買うために多くの時間を費してしまう．そこで, 両方でのモデル化が必要になりどちらの行列でも滞在時間が短くなるようにしなけらばならない.[1]

2　モデルの定式化

2.1　モデルの説明

現在, 食堂のサービス状況は, 食事を受け取るカウンターと買うためのレジで待ち行列がつくられるタンデム型待ち行列になる. そこで 2 つの待ち行列を考え, 現在の食堂での平均滞在時間 [2] を求めていく.

2.2　平均滞在時間の定式化

カウンターのモデルは 3 つの窓口が存在し, それぞれの窓口に行列をつくる．また, 系内に入れる人数にも限界があるため, ポアソン到着, 指数サービスに従う $M/M/1(N)$ モデルとして定式化を行う．レジのモデルは, 最大で 3 つの窓口を開けることができる．窓口には独立した行列をつくり, 系内に入れる人数も限られるためカウンターのモデルと同様に, ポアソン到着, 指数サービスに従う $M/M/1(N)$ モデルとして定式化を行った．よって，平均滞在時間 W を求めると，

$$W = \frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{\mu(1-\rho)(1-\rho^N)} \tag{1}$$

のようになる．また, 窓口の数が k あるときの平均滞在時間を W_f とし求める. このとき窓口 i での到着率を λ_i, 平均滞在時間を W_i とする.

$$W_f = \frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i W_i}{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i} \tag{2}$$

これによって, 現在の食堂における平均滞在時間 W_1 は, カウンターでの平均滞在時間 W_{f1} とレジでの平均滞在時間 W_{f2} の和で求められる.

$$W_1 = W_{f1} + W_{f2} \tag{3}$$

3　改善モデル

現在の食堂のサービスでは, 混雑のピーク時に行列ができてしまう．そこで, 食堂での滞在時間を短くするモデルをいくつか考えていく.

3.1　改善モデル 1

それぞれの窓口に独立で並ぶ行列を 1 列にする改善モデルは, 複数ある窓口に対し 1 列で行列をつくる．また, 系内に入れる人数も限られるためポアソン到着, 指数サービスに従う $M/M/S(N)$ モデルとして定式化を行う．平均滞在時間を求めるために，系内数の平均値 L[3] を求めると以下のようになる.

$$L = \{\sum_{n=1}^{S}\frac{a^n}{(n-1)!} + \frac{S^S}{S!}\{\frac{(S+1)\rho^{S+1}-(N+1)\rho^{N+1}}{(1-\rho)^2} - \frac{S\rho^{S+2}-N\rho^{N+2}}{(1-\rho)^2}\}\}p_0 \tag{4}$$

また, 系内に N 人いるとき, 次に到着した人は行列に入ることができない．よって, 実質到着率 λ_a[4] は,

$$\lambda_a = \frac{\lambda(S! - S^S\rho^N p_0)}{S!} \tag{5}$$

となる. したがってリトルの公式を用いて平均滞在時間 W を求めると以下のようになる.

$$W = \frac{L}{\lambda_a} \tag{6}$$

式 (2)，式 (6) を用いて，カウンターを $M/M/S(N)$ モデル, レジを $M/M/1(N)$ モデルとしたときの平均滞在時間を W_{k1} として求める．また, カウンターを $M/M/1(N)$ モデル, レジを $M/M/S(N)$ モデルとしたときの平均滞在時間を W_{k2} とし, カウンター, レジともに M/M/S(N) のモデルとしたときの平均滞在時間を W_{k3} として求め, 現在のサービスと比較していく.

3.2　改善モデル 2

現在の食堂のサービスで行列ができる原因は, レジでの最大容量の少なさとサービス時間が大きいことである. よって, レジのモデルを新たに食券機を導入するモデルに変えて考える．食券機の設置場所を最大待ち人数を考えない場所に設置すると, 系内の最大待ち人数は $N \to \infty$ として考えられる. よって, 食券機を設置したときのモデルはポアソン到着, 指数サービスに従う M/M/S(∞) モデルを用いて考える．よって, 食券機を導入したときの平均滞在時間を W_s として求めると以下のように表せる.

$$W_s = \frac{S^S\rho^{S+1}}{\lambda S!(1-\rho)^2}p_0 + \frac{1}{\mu} \tag{7}$$

4　解析結果

現状のサービスと改善モデル 1 での平均滞在時間を比較する．また, このときの窓口は 2 つである．

	カウンター	レジで	平均滞在時間
W_1	1.18596	0.27100	1.45696
W_{k1}	0.57948	0.27100	0.85048
W_{k2}	1.18596	0.20391	1.38987
W_{k3}	0.57948	0.20391	0.78339

表 1　サービスの比較

また, 現在の食堂におけるレジへの到着率を変化させ, レジでの平均滞在時間を求める。そのときレジの窓口を 1 つ 2 つ 3 つに場合分けし, 到着率が増えると, 窓口をどのように増やせばよいかをみる．

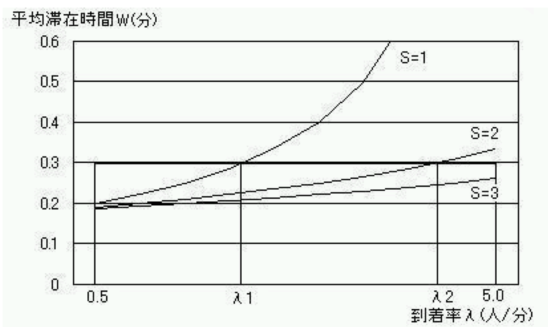

図 1　窓口の数に対し到着率が変化するときの平均滞在時間の推移

次に, 食券機を導入したときの改善モデルで, 食券機の台数とサービス率を変化させ, そのときの平均滞在時間を求める．

$\mu \backslash S$	1	2	3	4	5
4	2.6316	0.7030	0.2585	0.2512	0.2502
4.5	1.1364	0.4582	0.2276	0.2229	0.2223
5	0.7246	0.3375	0.2035	0.2004	0.2000
5.5	0.5319	0.2685	0.1843	0.1821	0.1818
6	0.4202	0.2246	0.1684	0.1668	0.1667
6.5	0.3472	0.1945	0.1551	0.1540	0.1539
7	0.2959	0.1724	0.1438	0.1429	0.1429
7.5	0.2755	0.1554	0.1341	0.1334	0.1333
8	0.2283	0.1419	0.1256	0.1250	0.1250
8.5	0.2049	0.1309	0.1181	0.1177	0.1177
9	0.1859	0.1217	0.1115	0.1111	0.1111

表 2　食券機の台数による平均滞在時間の比較

5　考察

現在の食堂におけるサービスのモデルと比較するために, 複数の窓口に対して 1 つの行列をつくる, 改善モデル 1 を考えた．2 つのモデルを比較した結果はカウンター, レジともに $M/M/S(N)$ モデルにするときが最も早く系を抜けることができる. しかし, カウンターだけを $M/M/S(N)$ モデルにしたときの結果もカウンター, レジともに $M/M/S(N)$ モデルにしたときと平均滞在時間に大きな違いはなかった. このことより, 今まではレジで平均滞在時間が大きくなっていると考えていたが, カウンターの方が滞在時間を短くするのに重要だと考えられる．

現在の食堂のデータより, レジの系内で平均滞在時間が 0.3 を超えると食堂が混雑する傾向がある．よって, 平均滞在時間が 0.3 を超えないようにしなければならない. そこで, 平均滞在時間が 0.3 を超えるときの到着率をグラフから読みとると到着率 λ_1 は 2.167 になる, よって到着率が 2.167 を超えたとき窓口を 1 つから 2 つにする. また, 到着率 λ_2 が 4.334 になるので, 窓口を 2 つから 3 つにすると大きな混雑は起こらないと考えられる．

食券を購入するための平均滞在時間をみると, 食券機の台数が増えれば系内で過ごす時間が短くなるのはあきらかである．しかし, 食券機の台数が 3 台目以降は平均滞在時間に差がほぼなくなり, 系内で過ごす時間の大半はサービスを受ける時間になる, 要するに食券を買うための時間である. よって, 食券の台数は 3 台あれば現在のレジで起こる行列はほぼなくなると予想される．

6　おわりに

今回の論文では, ピーク時の 1 時間で到着率とサービス率を出したが, 時間間隔を短くしたとき解析を行えばもっと生活の中での食堂に近付きよい結果が得られたと考える．

今後, カウンター, レジだけのモデルでなく食堂の座席管理も含めて考えて食堂を解析していきたい．

謝辞

本論文を進めるにあたり,2 年間ゼミを通じて御指導頂いた澤木勝茂教授, また, 多くの助言, 御協力をくださった方々に深く感謝を致します．

参考文献

[1] 牧野都治：待ち行列の応用, 森北出版 (1969).
[2] 森村英典, 大前義次：応用待ち行列理論, 日科技連 (1975).
[3] 小和田正, 沢木勝茂, 加藤豊：OR 入門-意志決定の基礎-, 実教出版 (1984).
[4] 尾崎俊治：確率モデル入門, 朝倉書店 (1996).