

# 為替リスクを含む最適株式ポートフォリオ選択問題

2000MM016 堀田 雅文

2000MM020 稲熊 敏和

指導教員 澤木 勝茂

## 1 はじめに

現在の日本の銀行預金は低金利であり、金利がほとんどつかない銀行預金よりも、リスクを伴うが、利回りの高い金融商品に注目が集まっている。また、外国の金融市場との仕切りもなくなり、グローバル化が進んだ。このことにより、個人が自由に他国通貨や証券を購入することが可能になった。こうした自由競争は企業間の競争を促し、結果として金利やサービスなどで消費者の選択の幅が広がった。その結果、日本国内の金融商品のみならず、外国の金融商品も注目されている。

しかしながら、私たちが外国の金融商品を所有したとき、その価値を私たちの物差しで計れるように修正する必要がある。その価値表示をするためには外国の金融商品に為替レートを掛けてやればよいが、この為替レートも金融商品の価格と同様に、日々刻々と変化している。つまり、外国の金融商品は為替リスクも考慮しなければならないわけであるが、この為替変動による差益を利用して多大な利益を挙げている投資家・企業もいる。そのため投資家の資産運用はより多様に、より複雑化してきたといえる。以上のことから投資家の資産配分（ポートフォリオ選択）というものは大変興味深い問題であると思われる。

本論文では、為替を考慮した外国株、国内株を合わせた時系的資産配分選択問題 [1] について研究した。

## 2 資産価格・為替レートの確率過程

外国株・国内株の資産価格の確率過程と外国株を日本円表示にする場合に必要な為替レートの確率過程について説明する。

### 2.1 外国株株価の確率過程

- $X_i(t)$ : 時刻  $t$  での外国株資産  $i$  の株価
- $a_i$ : 外国株資産  $i$  の平均パラメータ
- $b_i$ : 外国株資産  $i$  の分散パラメータ
- $Z_i(t)$ : 外国株資産  $i$  に対する平均 0, 分散  $dt$  の標準ウィナー過程

外国株資産  $i$  の株価  $X_i(t)$  は次の確率微分方程式（幾何ブラウン運動）に従う。

$$\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} = a_i dt + b_i dZ_i(t), (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

### 2.2 国内株株価の確率過程

- $\bar{X}_i(t)$ : 時刻  $t$  での国内株資産  $i$  の株価
- $A_i$ : 国内株資産  $i$  の平均パラメータ
- $B_i$ : 国内株資産  $i$  の分散パラメータ
- $\bar{Z}_i(t)$ : 国内株資産  $i$  に対する平均 0, 分散  $dt$  の標準ウィナー過程

### 準ウィナー過程

国内株資産  $i$  の株価  $\bar{X}_i(t)$  は次の確率微分方程式（幾何ブラウン運動）に従う。

$$\frac{d\bar{X}_i(t)}{\bar{X}_i(t)} = A_i dt + B_i d\bar{Z}_i(t), (i = m+1, m+2, \dots, n) \quad (2)$$

### 2.3 為替レートの確率過程

- $e(t)$ : 時刻  $t$  での日本円に対する外貨の為替レート
- $\mu$ : 為替レートの平均パラメータ
- $\sigma$ : 為替レートの分散パラメータ
- $Y(t)$ : 為替レートに対する平均 0, 分散  $dt$  の標準ウィナー過程

為替レート  $e(t)$  は次の確率過程（幾何ブラウン運動）に従う

$$\frac{de(t)}{e(t)} = \mu dt + \sigma dY(t) \quad (3)$$

### 2.4 外国株の円表示

外国株の円表示は外国株価  $X_i(t)$  と為替レート  $e(t)$  との積  $X_i(t) \cdot e(t)$  で表され、これを  $S_i(t) = X_i(t) \cdot e(t)$  と置くと伊藤の定理より外国株の円での価格変動は

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = (a_i + \mu + \sigma b_i \rho_{y,i}) dt + b_i dZ_i(t) + \sigma dY(t) \quad (4)$$

となる。また、 $\rho_{y,i}$  は外国株  $i$  と為替レートの相関係数である。

### 3 平均・分散

#### ウィナー過程の性質

$$(dt)^\gamma = 0, dt \cdot dZ_i(t) = 0, (dZ_i(t))^2 = dt \quad (\gamma > 1)$$

を用いて、外国株の円での価格変動率平均と分散について述べておく。

#### 3.1 外国株の価格変動率平均

外国株の価格変動率平均を以下に示す。

$$E \left[ \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} \right] = (a_i + \mu + \sigma b_i \rho_{y,i}) dt$$

以降便宜上  $a_i + \mu + \sigma b_i \rho_{y,i}$  を  $\beta_i$  とする。

#### 3.1.1 外国株の価格変動率分散

外国株の価格変動率分散を以下に示す。

$$Var \left( \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} \right) = (b_i^2 + \sigma^2 + 2b_i \sigma \rho_{y,i}) dt$$

#### 4 富非分割型における定式化

資産配分問題をモデル化するにあたって、現実の外国株と国内株には何らかの相関関係があると考えるのが妥当であろう。そこでより現実に近いモデルとして外国株と国内株を分割せずに資産に組み込む場合について定式化していく。

##### 4.1 各記号の定義

- $y_i(t)$ : 時刻  $t$  での外国株資産  $i$  への投資比率
- $\bar{y}_i(t)$ : 時刻  $t$  での国内株資産  $i$  への投資比率
- $Q_i(t)$ : 時刻  $t$  での各資産価格
- $W(t)$ : 時刻  $t$  での富
- $C(t)$ : 時刻  $t$  での消費
- $u(C(t), t)$ : 時刻  $t$  での瞬間効用関数
- $B(W(T), T)$ : 期末  $T$  での遺産効用関数
- $N_i(t)$ : 時刻  $t$  での外国株  $i$  の保有量
- $M_i(t)$ : 時刻  $t$  での国内株  $i$  の保有量

ここで  $Q_i(t)$  について以下に詳しく定義する。

$$Q_i(t) = \begin{cases} \frac{S_i(t)}{X_i(t)} & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \frac{S_i(t)}{X_i(t)} & (i = m + 1, m + 2, \dots, n) \end{cases}$$

##### 4.2 富の確率過程と定式化

時刻  $t$  での瞬間の富  $W(t)$  を (各資産)・(保有量) とすれば富は以下で表せる。

$$W(t) = \sum_{i=1}^m N_i(t) \cdot S_i(t) + \sum_{i=m+1}^n M_i(t) \cdot \bar{X}_i(t)$$

よって時刻  $t$  での外国株資産・国内株資産への投資比率  $y_i(t), \bar{y}_i(t)$  は次式

$$y_i(t) = \frac{N_i(t) \cdot S_i(t)}{W(t)} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

$$\bar{y}_i(t) = \frac{M_i(t) \cdot \bar{X}_i(t)}{W(t)} \quad (i = m + 1, m + 2, \dots, n) \quad (6)$$

となり、投資比率の合計は当然 1 なので

$$\sum_{i=1}^m y_i(t) + \sum_{i=m+1}^n \bar{y}_i(t) = 1 \quad (7)$$

さらに、時刻  $t$  から  $t + dt$  間の富の変動  $dW(t)$  は (各株価の変動)・(保有量) と言うことができるので (5) 式と (6) 式を用いて富の変動について整理すれば富の確率過程 (富の変動) は

$$\begin{aligned} dW(t) = & \left\{ \sum_{i=1}^m y_i(t)W(t)\beta_i + \sum_{i=m+1}^n \bar{y}_i(t)W(t)A_i \right. \\ & \left. - C(t) \right\} dt \\ & + \sum_{i=1}^m y_i(t)W(t)(b_i dZ_i(t) + \sigma dY(t)) \\ & + \sum_{i=m+1}^n \bar{y}_i(t)W(t)B_i d\bar{Z}_i(t) \end{aligned} \quad (8)$$

となり、資産価格が幾何ブラウン運動で上記の確率過程 (8) 式と制約条件 (7) 式の下で投資家の期待効用を最大にする最適消費と最適資産配分を求めればよいので、 $y$  を資産配分のベクトルとすれば定式化は、

$$\begin{aligned} \sup_{C(t), y} E \left[ \int_0^T u(C(t), t) dt + B(W(T), T) \mid W(0) = w \right] \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^m y_i(t) + \sum_{i=m+1}^n \bar{y}_i(t) = 1 \end{aligned}$$

##### 4.3 最大期待効用と最適化方程式

時刻  $t$  から  $T$  まで最適な資産配分  $y(t), \bar{y}(t)$  を選ぶことによって獲得される効用を最大期待効用  $V(\cdot)$  とし以下にそれを示す。

$$\begin{aligned} V(w, t) = \sup_{C(t), y} E \left[ \int_t^T u(C(\tau), \tau) d\tau \right. \\ \left. + B(W(T), T) \mid W(t) = w \right] \quad (9) \\ (t \leq \tau \leq T) \end{aligned}$$

また、最適性の原理の連続時間への拡張と微分作用素を用いて (9) 式を整理すれば

$$\sup_{C(t), y} \{u(C(t), t) + D_w[V(w, t)]\} = 0 \quad (10)$$

ここで  $D_w$  は  $t \rightarrow t + dt$  間の最大期待効用変化量であり  $D_w[V(w, t)] = \lim_{dt \rightarrow 0} E[dV] \frac{1}{dt}$  であるので、伊藤の定理を用いて  $dV$  について求めると

$$dV = V_t dt + V_w dW + G \cdot dt \quad (11)$$

また、 $G$  は以下である。

$$\begin{aligned} G = & \frac{1}{2} V_{ww} \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m y_i(t) y_j(t) W(t)^2 (\sigma_{i,j} + \sigma_{i,y} \right. \\ & \left. + \sigma_{y,j} + \sigma^2) \right. \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=m+1}^n y_i(t) \bar{y}_j(t) W(t)^2 (\sigma_{i,\bar{j}} + \sigma_{y,\bar{j}}) \\ & + \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=1}^m \bar{y}_i(t) y_j(t) W(t)^2 (\sigma_{\bar{i},j} + \sigma_{\bar{i},y}) \\ & \left. + \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \bar{y}_i(t) \bar{y}_j(t) W(t)^2 \sigma_{\bar{i},\bar{j}} \right] \end{aligned}$$

従って、(11) 式で得た  $dV$  を用いて  $D_w[V(\cdot)]$  を求めると

$$\begin{aligned} D_w[V(\cdot)] = & \lim_{dt \rightarrow 0} E[dV] \frac{1}{dt} \\ = & V_t + \left[ \sum_{i=1}^m y_i(t) W(t) \beta_i \right. \\ & \left. + \sum_{i=m+1}^n \bar{y}_i(t) W(t) A_i - C(t) \right] V_w + G \end{aligned} \quad (12)$$

ただし, (12) 式において

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, V_w = \frac{\partial V}{\partial w}, V_{ww} = \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} \quad \text{である.}$$

よって最適化方程式は (10) 式に (12) 式を代入したものである.

## 5 解法・解

明示解を求めるために効用関数・遺産関数を以下に定義する. 投資家は危険回避的 ( $u'' < 0, u' > 0$ ) とすれば

$$U(C(t), t) = (C(t))^\alpha \quad (13)$$

$$B(W(T), T) = (W(T))^\alpha \quad (14)$$

$$(0 < \alpha < 1)$$

注:  $(1 - \chi)^\alpha$  は投資家の相対的危険回避係数とする. ( $\chi$  は投資家の相対的危険回避度とする.)

上記の資産配分制約 (7) 式の下で最適化の方程式を解くために, ラグランジュ関数  $L(c, y, \bar{y}, \lambda)$  を以下とする.

$$L(c, y, \bar{y}, \lambda) = (C(t))^\alpha + D_w[V(w, t)] \\ + \lambda \left( 1 - \sum_{i=1}^m y_i(t) - \sum_{i=m+1}^n \bar{y}_i(t) \right)$$

最適性の 1 階の条件より

$$\frac{\partial L}{\partial C} = \alpha(C(t))^{\alpha-1} - V_w = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = W(t)V_w\beta_i + \frac{\partial G}{\partial y_i} - \lambda = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i} = W(t)V_wA_i + \frac{\partial G}{\partial \bar{y}_i} - \lambda = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1}^m y_i(t) - \sum_{i=m+1}^n \bar{y}_i(t) = 0 \quad (18)$$

よって, (16)・(17) 式を 1 から  $n$  まで書き列べて (18) 式を合わせて行列表現すれば

$$\Gamma \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \\ y_{m+1}(t) \\ \vdots \\ \bar{y}_n(t) \\ \nu \end{bmatrix} = -\frac{V_w}{W(t)V_{ww}} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \\ A_{m+1} \\ \vdots \\ A_n \\ -\frac{W(t)V_{ww}}{V_w} \end{bmatrix} \quad (19)$$

また,  $\Gamma$  は (16)~(18) 式における  $y_i(t), \bar{y}_i(t)$  の係数行列であり,  $\nu = -\frac{\lambda}{W(t)^2 V_{ww}}$  である. さらに  $\Gamma$  の  $ij$  要素を  $\varepsilon_{i,j}$  とし,  $\Gamma$  の逆行列の  $ij$  要素を  $\varepsilon^{i,j}$  とすれば (19) 式は以下に解け, これが最適資産配分である.

$$y_i^*(t) = \frac{1}{1-\alpha} \left( \sum_{j=1}^m \varepsilon^{i,j} \beta_j + \sum_{j=m+1}^n \varepsilon^{i,j} A_j \right) + \varepsilon^{i,n+1} \quad (20)$$

$$\bar{y}_i^*(t) = \frac{1}{1-\alpha} \left( \sum_{j=1}^m \varepsilon^{i,j} \beta_j + \sum_{j=m+1}^n \varepsilon^{i,j} A_j \right) + \varepsilon^{i,n+1} \quad (21)$$

従って, 最適資産配分の式 (20) と (21) は効用関数・遺産関数を (13)・(14) と定めた場合において, 効用関数・富・及び時間に依存しないことがわかる.

## 6 I-CAPM

### 6.1 モデル設定と最適資産配分

資産価格の代わりに状態変数  $X_i, i = 1, 2, \dots, N$  を導入する. (4) 式・(2) 式の平均のパラメータ  $\beta_i, A_i$  自身がそれぞれ次の確率微分方程式に従うものと仮定する.[1]

$$d\beta_i = \mu_i dt + \nu_i dq_i(t)$$

$$dA_i = \bar{\mu}_i dt + \bar{\nu}_i d\bar{q}_i(t)$$

ここで,  $dq_i(t), d\bar{q}_i(t)$  はそれぞれ平均 0, 分散  $dt$  のウィナー過程とする. また, 新しい状態変数  $X_i(t)$  は次の確率微分方程式で与えられるものとする.

$$dX_i(t) = \begin{cases} f_i(X)dt + g_i^*(X)dq_i(t) & (i = 1, 2, \dots, M) \\ f_i(X)dt + g_i^*(X)d\bar{q}_i(t) & (i = M+1, M+2, \dots, N) \end{cases}$$

また  $m$  番目,  $n$  番目の資産をそれぞれ無危険資産とする.  $l = m-1, h = n-1$  とする. 各投資家は期待効用を最大にするように消費と資産配分の選択を行うものとする. このとき, 期待効用の最大値  $V$  は富  $W$  と状態変数  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$  の関数である. この仮定の下で最適な資産配分を求める. また状態変数  $X$  は 2 つの要素から成るので,  $\beta_m = r, A_n = \bar{r}$  として, 最適な資産配分は以下のように表現できる.

$$A(g_i + \bar{g}_i) + H_r(d_i + \bar{d}_i) + H_{\bar{r}}(o_i + \bar{o}_i) \quad (22) \\ = \begin{cases} y_i^* W & (i = 1, 2, \dots, l) \\ \bar{y}_i^* W & (i = m+1, m+2, \dots, h) \end{cases}$$

ここで,  $A = -V_W/V_{WW}, H_k = -V_{Wk}/V_{WW}, g_i = \sum_{j=1}^l \psi^{ij}(\beta_j - r), \bar{g}_i = \sum_{j=m+1}^h \psi^{ij}(A_j - \bar{r})$  である. また  $\psi^{ij}$  は資産  $i$  と資産  $j$  との共分散を行列化したものの逆行列要素である.  $d_i, \bar{d}_i, o_i, \bar{o}_i$  はそれぞれ  $dX_j$  と資産  $i$  の価格変動との共分散に  $\psi^{ij}$  を掛けたものである. また  $g_i, \bar{g}_i, d_i, \bar{d}_i, o_i, \bar{o}_i$  はそれぞれ個々の投資家の効用と富からは独立な量である. 任意の個人の資産に対する需要を満足するためには 8 種類のミューチュアルファンドを必要とする. 第 1, 5, 7 のファンドはそれぞれ異なる比率で資産  $i (i = 1, 2, \dots, l)$  を保有し, 第 3, 6, 8 のファンドはそれぞれ異なる比率で資産  $i (i = m+1, m+2, \dots, h)$  を保有する. また第 2 のファンドは  $m$  番目の無危険資産のみを保有し, 第 4 のファンドは  $n$  番目の無危険資産のみを保有する.

## 6.2 評価式の導出

(22) 式より, 危険資産  $i$  の  $k$  番目の投資家による需要関数は

$$D_i^k = A^k g_i + A^k \bar{g}_i + H_r^k d_i + H_r^k \bar{d}_i + H_{\bar{r}}^k o_i + H_{\bar{r}}^k \bar{o}_i$$

となる. 危険資産  $i$  の市場全体での需要は,

$$D_i \equiv \sum_k D_i^k \equiv A(g_i + \bar{g}_i) + H_r(d_i + \bar{d}_i) + H_{\bar{r}}(o_i + \bar{o}_i)$$

となる.  $y_i, \bar{y}_i$  をすべての資産総額  $\Theta$  の中で資産  $i$  の占める割合と新たに定義すれば, 市場均衡の下では  $D_i = y_i \Theta, \bar{D}_i = \bar{y}_i \Theta$  である. 上式と結合させれば,

$$A(g_i + \bar{g}_i) + H_r(d_i + \bar{d}_i) + H_{\bar{r}}(o_i + \bar{o}_i) = \begin{cases} y_i \Theta (i = 1, \dots, l) \\ \bar{y}_i \Theta (i = m + 1, \dots, h) \end{cases}$$

となり, これを  $g_i, \bar{g}_i$  について解き,  $g_i = \sum_{j=1}^l \psi^{i,j} (\beta_j - r)$ ,  $\bar{g}_i = \sum_{j=m+1}^h \psi^{i,j} (A_j - \bar{r})$  を代入して, さらに  $\beta_i - r, A_i - \bar{r}$  について解くと, 以下の通りとなる.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\Theta}{A} \right) \left( \sum_{j=1}^l \psi_{i,j} y_j + \sum_{j=m+1}^h \psi_{i,j} \bar{y}_j \right) \\ & - \left( \frac{H_r}{A} \right) \left( \sum_{j=1}^l \psi_{i,j} (d_j + \bar{d}_j) + \sum_{j=m+1}^h \psi_{i,j} (d_j + \bar{d}_j) \right) \\ & - \left( \frac{H_{\bar{r}}}{A} \right) \left( \sum_{j=1}^l \psi_{i,j} (o_j + \bar{o}_j) + \sum_{j=m+1}^h \psi_{i,j} (o_j + \bar{o}_j) \right) \\ & = \begin{cases} \beta_i - r (i = 1, 2, \dots, l) \\ A_i - \bar{r} (i = m + 1, m + 2, \dots, h) \end{cases} \quad (23) \end{aligned}$$

(23) 式は, 系時的資本資産評価モデルの評価式であり, 資産  $i$  の期待超過収益率の市場均衡式を与えている.

## 7 実証結果と考察

5章で得た解に2001年下半期のデータを代入して具体的な資産配分を求める. さらに, その際に相対的危険回避係数  $\alpha$  を変動させた各場合における資産配分について次節に示す.

### 7.1 実証結果

表1 2001年下半期の富非分割型での外国株への資産配分

$\alpha$	ソニー	デルモンテ	YAHOO	DELL	NIKE
0.2	-4.4952	-0.4596	1.0098	-0.6537	12.8771
0.5	-7.2056	-0.8734	1.6274	-0.9854	20.4421
0.7	-12.0242	-1.6090	2.7254	-1.5749	33.8911

表2 2001年下半期の富非分割型での国内株への資産配分

$\alpha$	ソニー	キッコーマン	トヨタ	NEC	ミズノ
0.2	-0.5488	-0.2925	-0.2690	0.1964	-6.3642
0.5	-0.8361	-0.6910	-0.4544	0.2336	-10.2571
0.7	-1.3469	-1.3996	-0.7838	0.2998	-17.1777

### 7.2 考察

2001年下半期の資産配分において最初に述べておかなければならないのは2001年9月11日におきたアメリカ・ニューヨークの世界貿易センタービルへのテロによる取引停止である. これにより, この時期株価は外国株・国内株に関係なく大幅に下落することとなり, 資産配分はこの影響から早くに立ち直りを見せ平均収益率が大きい銘柄により多くの資産配分をおこなっている. さらに相対的危険回避係数  $\alpha$  が大きくなるにつれて, リスク尺度とした分散の大きい銘柄に投資する傾向も見て取れる結果となり, 5章で定義した  $\alpha$  が確かに危険回避係数としての役目を果たしていると推測できる.

また別紙で配布した相関係数表から, 特徴を端的に言えば外国株のソニーは, 当然のことながら国内株のソニーと強い相関をもち, 約40%の情報量をもつ. さらに同じIT業界とも強い相関を示し, 競合関係にあっても「株価は業界全体・市場全体を表す」という結果と言えるだろう.

### 8 おわりに

本論文において, 投資家の効用を最適にするような最適資産配分問題について研究してきたが, 実際の株式市場において空売りなどは信用問題等が絡み, 今回のような結果はあまり現実的な資産配分とは考えがたい. よって, より現実に即した最適資産配分を行う為に, さらに制約をつけるなどしてモデル化する必要がある. しかしながら, 各銘柄間の相関係数を導出することによって各銘柄・各業界の関連性を見ることができ, 興味深い結果を得ることもできた.

今後の課題としては, この相関係数などの結果を利用した株価の産業連関表のような表を作成することであり, より現実に近い最適資産配分についての研究をすることである.

### 謝辞

本論文の作成ならびに指導教員として熱心に御指導頂いた澤木勝茂教授及び, 大学院の先輩方に深く感謝致します.

### 参考文献

[1] 澤木勝茂: ファイナンスの数理, 朝倉書店 (1994).