直観主義論理のセマンティクス

2000MM108 吉田 明
指導教員　佐々木 克巳

1　はじめに

岩波数学辞典第 3 版は、直観主義論理を、次のように説明している。「命題はすべて、原則的には、すべて真か偽のいずれかに定まっている。いわゆる排中律の考えを基調とする最も普通の意味における論理を古典論理とよぶ。命題論理、述語論理、型の論理などというときも、普通には、古典論理の範囲で考えたものを意味している。しかし、排中律を認めないという直観主義の数学に用いられる論法を、記号論理学的に研究する場合もある。そのような場合、その研究の対象となっている論理のことを直観主義論理とよぶ。」

本研究では、小野 [1] にしたがって、命題を対象とした直観主義論理を sequent 計算による形式的論理体系として定義し、LJ で証明可能性について述べる。そして [1] にしたがって、クリプキのセマンティクスを導入し、その健全性と完全性を理解する。

2　形式体系 LJ

論理式を次のように定義する。
(i) それぞれの命題変数は論理式である。
(ii)A, B がともに論理式ならば、

$$(A \wedge B), \qquad (A \vee B), \qquad (A \supset B), \qquad (\neg A)$$

はいずれも論理式である。

また、次のような約束で論理式のカッコを取り除くことにする。
(I) 一番外側のカッコは省略する。
(II) 否定記号 $\neg$ は一番結合が強いものと考え、$(\neg A)$ のカッコを省略する。
さらに、論理式 $p \wedge \neg p$ を$\perp$ とかく。

形式体系 LJ における式は次の形である。

$$A_1, \cdots, A_m \to B$$

ただし、$m = 0$ でもよく、右辺の B はなくてもよい。LJ と古典命題論理の形式体系 LK との違いは右辺の論理式の数を高々1 つに制限したという点である。直観的な意味は LK の場合と全く同様であり、A_1から A_m までを仮定すると B が導かれることを表している。LJ の始式は $A \to A$ の形である。LJ の推論規則は、全部で 15 個あり、構造に関する推論規則 5 個と論理結合子に関する推論規則 10 個に分けられる。

定義　証明図およびその証明図の終式を以下の I),II) のように帰納的に定義する。
I) 始式はそれだけで証明図であり、その証明図の終式はその始式自身である。
II)P_1(および P_2) はそれぞれ S_1(および S_2) をその終式とする証明図とする。さらに $\dfrac{S_1}{S}$(または $\dfrac{S_1 \quad S_2}{S}$) が LJ の推論規則の 1 つであれば $\dfrac{P_1}{S}$(または $\dfrac{P_1 \quad P_2}{S}$) は証明図であり、その終式は S である。

LJ の証明可能性の定義
式 S を終式とする LJ の証明図が存在するとき、S は LJ で証明可能であるという。

次の定理を LJ の cut 除去定理という。

定理　$\Gamma \to A$ が LJ で証明可能ならば $\Gamma \to A$ に到る LJ の証明図で cut を一度も用いないが存在する (A は空でもよい)。

cut 除去定理を使うと与えられた式が証明できないことを示すことができる。

例　$\neg\neg p \to p$ は LJ で証明不可能である。

3　直観主義論理のクリプキ・フレーム

任意の順序集合 $(M, \leqq)$ のことを直観主義論理のクリプキ・フレーム、M の要素を可能世界という。また $x, y \in M$ に対し $x \in U$ かつ $x \leqq y$ ならば $y \in U$ がなりたつとき 集合 M の部分集合 U が遺伝的であるという。各命題変数 p に対し、M の遺伝的部分集合 $V(p)$ を対応させるような写像 V を、フレーム $(M, \leqq)$ 上の付値という。V が $(M, \leqq)$ 上の付値であるとき、三つ組 $(M, \leqq, V)$ を直観主義論理のクリプキ・モデルという。与えられたクリプキ・モデル $(M, \leqq, V)$ に対し、M の要素と論理式の間の関係 $\models$ を次のように定義する。$a \models A$ のとき「(可能世界)a で A は真」という。$a \not\models A$ は $a \models A$ がなりたたないことを示す。

(1)　$a \models p \Longleftrightarrow a \in V(p)$ p は命題変数
(2)　$a \models A \wedge B \Longleftrightarrow a \models A$ かつ $b \models B$
(3)　$a \models A \vee B \Longleftrightarrow a \models A$ または $a \models B$
(4)　$a \models A \supset B \Longleftrightarrow a \leqq b$ となるすべての b に対し $b \not\models A$ または $b \models B$ ($\forall b(a \leqq b$ ならば、$b \not\models A$ または $b \models B))$
(5)　$a \models \neg A \Longleftrightarrow a \leqq b$ となるすべての b に対し $b \not\models A$ ($\forall b(a \leqq b$ ならば $b \not\models A))$

補助定理 2.1　$\models$ をフレーム $(M, \leqq)$ の付値とすると任意の論理式 A に対して、集合 $\{x(\in M) \mid x \models A\}$ は遺伝的である。

4　命題論理 LJ の健全性

論理式の列 $A_1, \cdots, A_m$ を Γ と表すとき、論理式 Γ^* および Γ_* を以下のように定める。

$$\Gamma^* = \begin{cases} A_1 & m = 1 \text{ のとき} \\ \perp & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\Gamma_* = \begin{cases} A_1 \wedge \cdots \wedge A_m & m > 0 \text{ のとき} \\ \neg\perp & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

論理式 $\Gamma_* \supset \Delta^*$ が恒真のとき、式 $\Gamma \to \Delta$ は恒真であるという。

定理 (健全性)　式 $\Gamma \to A$ が LJ で証明可能ならば、$\Gamma \to A$ は任意のフレームで恒真である。

証明　このことを示すにはつぎの (1),(2) を証明すればよい
(1) 任意の始式は任意のフレームで真である。
(2) 与えられたクリプキ・モデルで $(M, \leqq, \models)$ で LJ の推論規則の上式がすべて真ならば、その下式も真である。

上の (1)、(2) から健全性が導かれることはつぎのように示される。いま (1)、(2) が証明されたとすると、$\Gamma \to A$ に至る証明図が一つ与えられたとすると、その始式はどれも (1) により任意のフレームで真になる。つぎにこれらの始式のどれかに推論規則を適応して得られる式は (2) よりすべて与えられたクリプキ・モデル $(M, \leqq, \models)$ で真になる。これを繰り返していけば、最後に $\Gamma \to A$ が任意のフレームで恒真となることがわかる。

5　命題論理 LJ の完全性

定理 (完全性)　任意の式 $\Gamma \to A$ に対し、$\Gamma \to A$ が直観主義論理 LJ で証明可能となるための必要十分条件は $\Gamma \to A$ が任意のフレームで恒真となることである。

この定理は、定理をより強めた次の性質から示される。

直観主義命題論理の有限モデル性　任意の式 $\Gamma \to D$ に対し、$\Gamma \to D$ が任意の有限フレームで恒真ならば、$\Gamma \to D$ は直観主義論理 LJ で証明可能である。

論理式 $\Gamma_* \supset D$(D が空のときは$\neg\Gamma_*$) を A とし、A の部分論理式全体の集合を $\Psi(A)$ とおく。明かに $\Psi(A)$ は有限集合である。$\Psi(A)$ の部分集合 $U = \{A_1, \cdots, A_m\}$ および $V = \{B_1, \cdots, B_n\}$ に対し、LJ で式

$$A_1, \cdots A_m \to B_1 \vee \cdots \vee B_n$$

が証明可能でないとき、(U, V) は (LJ で) 無矛盾であるといい、さらに $U \cup V = \Psi(A)$ であるとき、(U, V) は (LJ で)$\Psi(A)$-極大無矛盾であるという。

補助定理 4.1　対 (U_0, V_0) が無矛盾のとき、$U_0 \subseteq U$ かつ $V_0 \subseteq V$ となる $\Psi(A)$ の部分集合 U と V が存在して、(U, V) は $\Psi(A)$-極大無矛盾になる。すなわち、任意の無矛盾な対は極大無矛盾にまで拡張できる。

ここで $M^* = \{U(\subseteq \Psi(A)) | (U, \Psi(A) - U)$ は $\Psi(A)$-極大無矛盾 $\}$ とする。U の範囲は ϕ(空集合) から $\Psi(A)$ までだから $(M^*, \subseteq)$ は有限フレームになる。

補助定理 4.2　M^* の任意の要素 U に対し、つぎの (1) から (5) がなりたつ。
(1) 論理式 $A_1, \cdots, A_m$ が U に属し B が $\Psi(A)$ に属すとき、$A_1, \cdots, A_m \to B$ が LJ で証明可能ならば B も U に属する。
(2)$B \wedge C \in \Psi(A)$ のとき、$B \wedge C \in U$
$\iff B \in U$ かつ $C \in U$
(3)$B \vee C \in \Psi(A)$ のとき、$B \vee C \in U$
$\iff B \in U$ または $C \in U$
(4)$B \supset C \in \Psi(A)$ のとき、$B \supset C \in U$
$\iff U \subseteq V$ となるすべての $V \in M^*$ に対し
$B \notin V$ または $C \in V$
(5)$\neg B \in \Psi(A)$ のとき、$\neg B \in U$
$\iff U \subseteq V$ となるすべての $V \in M^*$ に対し $B \notin V$

さて、フレーム $(M^*, \subseteq)$ 上の付値 $\models$ を、p が $\Psi(A)$ に属する命題変数ならば
(1)　$U \models p \iff p \in U$
と定め、p が $\Psi(A)$ に属さない命題変数のときには $U \not\models p$ と定める。このように定義すれば

$U \models p$ かつ $U \subseteq V$ ならば $V \models p$

が成り立つから、$\models$ はたしかに付値の条件をみたしている。ここで補助定理 4.2 を使えば、$\Psi(A)$ に属す任意の論理式 B に対し
(2)　$U \models B \iff B \in U$
が成り立つことを示すことができる。

完全性の証明　上の 2 つの補助定理を用いて次のように、有限モデル性が示される。

$\Gamma \to D$ は LJ で証明可能でないならば、明らかに A も LJ で証明可能でない。したがって対 $(\phi, \{A\})$ は無矛盾である。ここで補助定理 4.1 を使えば、ある $U_0 \in M^*$ が存在して $A \notin U_0$ である。ここで (2) において、$U = U_0, B = A$ とすれば $U_0 \not\models A$ が得られる。したがって $\Gamma \to D$ は有限フレーム $(M^*, \subseteq)$ で偽になる。

参考文献
[1] 小野寛晰 ,「情報科学における論理」, 日本評論社 (1994).