自然演繹法による証明の形式化

2000MM104 山田 悠介
指導教員　佐々木 克巳

1　はじめに

中学生や高校生のころ、数学の証明は決まった解法を学ぶこともなく、取り掛かりにくいイメージがあった。これに対して大学で学んだ数理論理学の中では、証明の分析や証明の形式化に触れることができた。とくに自然演繹法による形式化は、数学における実際の証明の形が反映されていた。この自然演繹法による形式化を深く研究することで、取り掛かりにくかった数学の証明の理解を深めることができるのではないかと思い、これを卒業研究のテーマとした。上江洲 [1] では、自然演繹法による体系を、推件式と関連させた体系 SNK という形で述べている。この研究では [1] にしたがって、体系 SNK を扱い、その性質、特に完全性の証明を理解する。

2　証明の分析

ここでは数学の中でよく用いられる推論を抽出し、その形式的な表現を与える。また、”かつ”、”または”、”ならば”、”でない”、”矛盾”に対する形式的な表現として、それぞれ $\wedge,\vee,\supset,\neg,\perp$ を用いる。

2.1　$\wedge,\vee,\supset,\neg$ に関する推論

『A が成り立ち B が成り立てば、A かつ B と結論できる』

$$(\wedge\mathrm{I})\frac{A \quad B}{A\wedge B}$$

『A かつ B が成り立てば、$A(B)$ と結論できる』

$$(\wedge\mathrm{E})\frac{A\wedge B}{A} \qquad (\frac{A\wedge B}{B})$$

『$A(B)$ が成り立てば、A または B と結論できる』

$$(\vee\mathrm{I})\frac{A}{A\vee B} \qquad (\frac{B}{A\vee B})$$

『A または B が成り立っていて、A を仮定しても B を仮定してもいずれの場合でも C が成り立てば、C と結論できる』

$$(\vee\mathrm{E})\frac{A\vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}$$

『A を仮定して B が成り立てば、A ならば B と結論できる』

$$(\supset\mathrm{I})\frac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A\supset B}$$

『A が成り立ち、さらに A ならば B が成り立てば、B と結論できる』

$$(\supset\mathrm{E})\frac{A \quad A\supset B}{B}$$

2.2　矛盾命題

『矛盾がいえれば、A と結論できる』

$$(\perp)\frac{\perp}{A}$$

『A が成り立ち A の否定も成り立てば、矛盾である』

$$(\neg\mathrm{E})\frac{A \quad \neg A}{\perp}$$

2.3　否定と背理法

『A を仮定すると矛盾が出るから A でない』

$$(\neg\mathrm{I})\frac{\begin{matrix}[A]\\ \perp\end{matrix}}{\neg A}$$

2.4　排中律

『A であるかまたは A でない』

$$(\mathrm{EM})\frac{}{A\vee\neg A}$$

3　証明の形式化

3.1　推件式

$A_1,A_2,\cdots,A_m,A$ が論理式のとき図形

$$A_1,A_2,\cdots,A_m\rightarrow A$$

を推件式という。m は 0 でもよい。$A_1,A_2,\cdots,A_m\rightarrow A$ は「前提として $A_1,A_2,\cdots,A_m$ の中のいくつかを用いた推論の結果が A である」ことを表している。

3.2　推件式の SNK 証明図

1. D が論理式で Γ が論理式の列であって、列 Γ の中に論理式 D が現れるならば、論理式 D のみからなる図形 D は推件式 $\Gamma\rightarrow D$ の SNK 証明図である。
2. $P_1,P_2,\cdots,P_m$ がそれぞれ推件式 $\Gamma\rightarrow A_1,\Gamma\rightarrow A_2,\cdots,\Gamma\rightarrow A_m$ の SNK 証明図であり、また、$Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ がそれぞれ推件式 $B_1,\Gamma\rightarrow C_1$,　$B_2,\Gamma\rightarrow C_2$, $\cdots$,　$B_n,\Gamma\rightarrow C_n$ の SNK 証明図であって
$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_m \quad \begin{matrix}[B_1]\\ C_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B_2]\\ C_2\end{matrix} \quad \cdots \quad \begin{matrix}[B_n]\\ C_n\end{matrix}}{D}$$
が SNK 推論図であれば図形
$$\frac{P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_m \quad Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_n}{D}$$
は推件式 $\Gamma\rightarrow D$ の SNK 証明図である。
3. 以上の二項目で得られるもののみが推件式の SNK 証明図である。

3.3　体系 SNK での証明可能性

1. 推件式 $\Gamma \to A$ の SNK 証明図があるとき、推件式 $\Gamma \to A$ は体系 SNK で証明可能であるという。
2. さらに、Γ が空のとき、論理式 A は体系 SNK で証明可能であるという。

4　命題の真偽と推論規則の正しさ

4.1　論理式と真理値

定義 1

各命題変数に真理値「真」または「偽」を対応させる関数を付値という。付値 v は、各論理式に 2 つの真理値を対応させる関数に自然に拡張できる。また、全ての付値 v で論理式 A(の値) が真であるとき、A をトートロジーという。

定義 2(**推件式の恒真性**)

1. 付値 v と推件式 $A_1, A_2, \cdots, A_m \to A$ について、もし $A_1, A_2, \cdots, A_m$ のどれもが付値 v で真ならば A は付値 v で真であるとき、推件式 $A_1, A_2, \cdots, A_m \to A$ は付値 v で真であるという(前件が空の場合、推件式 $\to A$ は付値 v で真であるという)。
2. すべての付値で真である推件式を恒真な推件式という。

4.2　SNK 推論図の妥当性

定義 3

1. 論理式 $A, A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_n, C_1, C_2, \cdots, C_n$ と付値 v について、論理式のいかなる列 Γ に対しても、もし推件式 $\Gamma \to A_1, \Gamma \to A_2, \cdots, \Gamma \to A_m,\ \ B_1, \Gamma \to C_1,\ \ B_2, \Gamma \to C_2,\ \ \cdots,\ \ B_n, \Gamma \to C_n$ のすべてが付値 v で真ならば、推件式 $\Gamma \to A$ が付値 v で真となるとき、推論図

$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_m \quad \begin{matrix}[B_1]\\ C_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B_2]\\ C_2\end{matrix} \quad \cdots \quad \begin{matrix}[B_n]\\ C_n\end{matrix}}{A}$$

は付値 v において妥当であるという。
2. すべての付値において妥当な推論図を単に妥当であるという。

補題 1

各 SNK 推論図 $(\wedge \mathrm{I}), (\wedge \mathrm{E}), (\vee \mathrm{I}), (\vee \mathrm{E}), (\supset \mathrm{I}), (\supset \mathrm{E}), (\neg \mathrm{I}), (\neg \mathrm{E}), (\perp), (\mathrm{EM})$ が妥当であることと、次の各推件式が恒真であることとは同等である。

1. $A, B \to A \wedge B$
2. $A \wedge B \to A \quad A \wedge B \to B$
3. $A \to A \vee B \quad B \to A \vee B$
4. $A \vee B, A \supset C, B \supset C \to C$
5. $A \supset B \to A \supset B$
6. $A, A \supset B \to B$
7. $A \supset \perp \to \neg A$
8. $A, \neg A \to \perp$
9. $\perp \to A$
10. $\to A \vee \neg A$

以上の推件式は全て恒真であることから、SNK 推論図はすべて妥当であることがわかる。

5　形式的論理体系の完全性

形式的論理体系が証明可能な論理式はトートロジーであり、またトートロジーである論理式は証明可能であるとき、その体系は論理的に完全であるという。

推論図の集合を形式的論理体系または簡単に体系と呼ぶことにする。

定理 1

妥当な推論図からなる体系で証明可能な推件式は恒真である。

定理 2(**体系 SNK の健全性**)

1. 体系 SNK で証明可能な推件式は恒真である。
2. 体系 SNK で証明可能な論理式はトートロジーである。

定理 3(**体系 SNK の完全性**)

1. 体系 SNK で証明可能な推件式は恒真であり、逆に、恒真な推件式は体系 SNK で証明可能である。
2. 体系 SNK で証明可能な論理式はトートロジーであり、逆に、トートロジーである論理式は体系 SNK で証明可能である。

定理 2 より、定理 3 を示すには、定理 2 の逆を示せば十分である。逆を、示すのに ABC 分解樹、ABC 分解停止式、ABC 分解不要可証式という概念が使われる。そして次の補題が示される。

補題 2

推件式 $\Gamma \to A$ についての次の条件 1,2 は同等である。

1. 推件式 $\Gamma \to A$ は体系 SNK で証明可能である。
2. 推件式 $\Gamma \to A$ の完全 ABC 分解樹の上端に現れる ABC 分解停止式はいずれも ABC 分解不要可証式である。

付値 v に対して、ABC 分解図の下式が v で真ならばその上式は v で真である。

したがって、以上の補題から定理が導かれる。

参考文献

[1] 上江洲 忠弘, 『記号論理』, 遊星社 (1999).

[2] 小野寛晰, 『情報科学における論理』, 日本評論社 (1994)