自然数論における帰納的定義と数学的帰納法

2000MM093 戸松裕晴
指導教員　佐々木克巳

1　はじめに

本研究では、細井 [1] にしたがって、自然数の体系を形式的な体系として展開する。そして、[1] にあるように自然数に関する通常の知識は、すべて、形式的体系において実証できることを確認する。形式体系の定義には、帰納的定義を多く用い、形式体系における証明には、数学的帰納法を多く用いる。さらに、難波 [2] に基づいて、シークエントを用いた形式的な証明の体系を導入し、その体系での形式的な証明を与える。

2　自然数の集合

ここでは、ペアノの方法にしたがって、自然数に対する形式的体系を導入する。

定義 2.1　(ペアノの公理)

次の公理によって規定される集合 N の要素を自然数という。

(1)$0 \in N$
(2)$x \in N \Rightarrow S(x) \in N$
(3)$S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$
(4)$x \in N \Rightarrow S(x) \neq 0$
(5)M は集合であって、"$0 \in M$"および"$x \in M$ ならば $S(x) \in M$" を満足する $\Rightarrow N \subseteq M$

以下、0 に対して S を n 回施した結果 を $S^n(0)$ で表す。

定義 2.1 より次の定理を示すことができる。

定理 2.2

$N = \{0, S(0), S^2(0), \cdots, S^n(0), \cdots\}$, かつ、
$0, S(0), S^2(0), \cdots, S^n(0), \cdots$はすべて異なる。

定理 2.3　数学的帰納法

$P(x)$ は x に関する命題 (述語) であるとする。$P(x)$ に対して、次の二つの条件が成立するとき、$P(x)$ はすべての自然数 x に対して成立する。
(1)$P(0)$ が成立する。
(2)$x \in N$ に対し $P(x)$ が成立するならば、$y = S(x)$ に対し $P(y)$ が成立する。

定理 2.4

$P(x, y)$ は x と y に関する命題 (述語) であるとする。$P(x, y)$ に対して、つぎの三つの条件が成立するとき、$P(x, y)$ は、すべての自然数の組 (x, y) に対して成立する。
(1)$P(0, 0)$ が成立する。
(2)$P(x, y)$ が成立する $\Rightarrow P(S(x), y)$ が成立する。
(3)$P(x, y)$ が成立する $\Rightarrow P(x, S(y))$ が成立する。

3　加法と乗法

次の定理によって、2 節で導入した集合 N の上に、関数を定義することができる。

定理 3.1

n 変数関数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $n+2$ 変数関数 $h(y, x, x_1, \cdots, x_n)$ が与えられたとき、次の 2 条件を満たす $n+1$ 変数関数 $f(x, x_1, \cdots, x_n)$ がただ一つ存在する。
(1)$f(0, x_1, \cdots, x_n) = g(x_1, \cdots, x_n)$
(2)$f(S(x), x_1, \cdots, x_n) = h(f(x, x_1, \cdots, x_n), x, x_1, \cdots, x_n)$

この関数を、g と h から帰納的に定義される関数という。また、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を、この関数のパラメータという。パラメータのない場合には、定理の中の (i) と (ii) は、次の (i)$'$ と (ii)$'$ になる。
(i)$'$ $f(0) = k$
(ii)$'$ $f(S(x)) = h(f(x), x)$

ただし、$k \in N$ であり、h は 2 変数関数である。

加法は次のように定義できる。

定義 3.2　加法の定義

$$\begin{cases} f(0, y) = y \\ f(S(x), y) = S(f(x, y)) \end{cases}$$

この定義により定まる関数 $f(x, y)$ を、$x + y$ と表すことにする。

この定義からよく知られた次の定理を導くことができる。

定理 3.3

(1)$(x + y) + z = x + (y + z)$
(2)$S(x) + y = x + S(y)$
(3)$x + y = y + x$
(4)$S(x) = x + 1$
(5)$x + y = x + z \Rightarrow y = z$
(6)$x + y = x \Rightarrow y = 0$
(7)$x + y = 0 \Rightarrow x = 0$ かつ $y = 0$
(8)$x + y = 1 \Rightarrow x = 1$ または $y = 1$

ここでは (2) の証明を与える。

証明：

$x = 0$ のとき、左辺 $= S(0) + y = S(0 + y) = S(y) =$

$0+S(y)=$ 右辺。

次に $S(n)+y=n+S(y)$ であると仮定する。

$x=S(n)$ のとき、

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= S(S(n))+y = S(S(n)+y)\\ &= S(n+S(y)) = S(n)+S(y) = \text{右辺}\end{aligned}$$

乗法は次のように定義できる。

定義 3.4　乗法の定義

$$\begin{cases} f(0,y)=0 \\ f(S(x),y)=f(x,y)+y \end{cases}$$

この定義により定まる関数 $f(x,y)$ を、$x\cdot y$ と表すこととする。

この定義からよく知られた次の定理を導くことができる。

定理 3.5

(1)$0\cdot x=x\cdot 0=0$

(2)$1\cdot x=x\cdot 1=x$

(3)$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$

(4)$x\cdot y=y\cdot x$

(5)$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

(6)$x\cdot y=0\Rightarrow x=0$ または $y=0$

(7)$x\cdot y=1\Rightarrow x=1$ かつ $y=1$

(8)$x\neq 0$ かつ $x\cdot y=x\Rightarrow y=1$

(9)$x\neq 0$ かつ $x\cdot y=x\cdot z\Rightarrow y=z$

4　順序

N 上に順序を定義することもできる。

定義 4.1

(1)$x\leq y$ とは、$x+z=y$ であるような z が N の中に存在することとする。

(2)$x<y$ とは、$x\leq y$ かつ $x\neq y$ のこととする。

定理 4.2

(1)$x\leq x$

(2)$x\leq y$ かつ $y\leq x\Rightarrow x=y$

(3)$x\leq y$ かつ $y\leq z\Rightarrow x\leq z$

5　シークエントによる推論規則を用いての証明

ここでは、古典述語論理のシークエント体系 LK をもとにして、3 節の証明をより形式的に与える。基本となる公理と推論規則は LK のものの他に、次にあげるものである。ここからは、後者関数 $S()$ を $'$ で記すこととする。

公理

$0=x'\Rightarrow$

$x'=y'\Rightarrow x=y$

$\Rightarrow x+0=x,$

$\Rightarrow x+y'=(x+y)',$

$\Rightarrow x\cdot 0=0,$

$\Rightarrow x\cdot y'=x\cdot y+x$

$\Rightarrow x=x$

$x=y\Rightarrow y=x$

$x=y,y=z\Rightarrow x=z$

推論規則

数学的帰納法

$$\frac{A(x),\Gamma\Rightarrow\Delta,A(x')}{A(0),\Gamma\Rightarrow\Delta,A(x)} \qquad \frac{A(x'),\Gamma\Rightarrow\Delta,A(x)}{A(x),\Gamma\Rightarrow\Delta,A(0)}$$

ただし、n は固有変数で、$\Gamma\Rightarrow\Delta$ には (自由変数として) 表れない。

交換の推論法則

$\Rightarrow s=t$ が証明可能であるような項 s,t について、

$$\frac{A(s),\Gamma\Rightarrow\Delta}{A(t),\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,A(s)}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A(t)}$$

これらを用いて、3 節の証明を形式的に行うことができる。定理 3.2(2) の証明は次のようになる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow x'=x'+0}{\Rightarrow x'=(x+0)'}}{\Rightarrow x'=x+0'}}{\Rightarrow x'+0=x+0'} \qquad \dfrac{\dfrac{x'+y=x+y'\Rightarrow (x'+y)'=(x+y')'}{x'+y=x+y'\Rightarrow x'+y'=x+y''}}{x'+0=x+0'\Rightarrow x'+y=x+y'}}{\Rightarrow x'+y=x+y'}$$

6　おわりに

今回、普段使っている計算を帰納的に証明したことにより、何気なく使ってきた定理や定義がかなり厳しい制約のもとになりたっていることがわかった。これらの内容を今後数学を扱う上で大切にしていきたいと思う。

7　謝辞

今回の研究において、2 年間もの間御指導下さった佐々木助教授をはじめ、同じゼミの仲間として一緒に研究してきた佐々木研究室のメンバーに心から感謝しています。

8　参考文献

[1] 細井　勉, 計算の基礎理論, 教育出版 (1975).

[2] 難波　完爾, 数学と論理, 朝倉書店 (2003).