述語計算 LK における公理と推論規則の従属性

2000MM089 田中 克典
指導教員　佐々木 克巳

1　はじめに

本研究では、体系 LK の定義、および LK における公理と推論規則の従属性について研究する。具体的には、LK の推論規則を、その推論規則に対応する式を LK の公理として認めたり、他の推論規則を LK の推論規則として認めたりすることで、導くことが可能であることを証明する。

2　LK の定義

ここでは、松本 [1] に従って、LK の定義を行なう。

2.1　LK の公理

D を任意の論理式とするとき、$D \to D$ の形の式だけが LK の公理である。

2.2　推論規則

S_1,S_2,$\cdots$,S_n,$S(n = 1, 2, \cdots)$ をそれぞれ式とするとき、

$$\frac{S_1 \quad S_2 \quad \cdots \quad S_n}{S}$$

の形の図形を推論規則という。S_1,$\cdots$,S_n をそれぞれ上式 (upper sequent), S を下式 (lower sequent) という。

2.3　LK の推論規則

1) 式の構造に関する推論規則

(weakening 左)　(weakening 右)

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, A}$$

(contraction 左)　(contraction 右)

$$\frac{A, A, \Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A, A}{\Gamma \to \Delta, A}$$

(exchange 左)　(exchange 右)

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \to \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \to \Delta} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A, B, \Sigma}{\Gamma \to \Delta, B, A, \Sigma}$$

(cut)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad A, \Sigma \to \Pi}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Pi}$$

2) 論理記号に関する推論規則

($\wedge$ 左 1)　($\wedge$ 左 2)

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{A \wedge B, \Gamma \to \Delta} \qquad \frac{B, \Gamma \to \Delta}{A \wedge B, \Gamma \to \Delta}$$

($\wedge$ 右)　($\vee$ 左)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta \quad B, \Gamma \to \Delta}{A \vee B, \Gamma \to \Delta}$$

($\vee$ 右 1)　($\vee$ 右 2)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \vee B}$$

($\neg$ 左)　($\neg$ 右)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}$$

($\supset$ 左)　($\supset$ 右)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Sigma \to \Pi}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Pi} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, A \supset B}$$

($\forall$ 左)　($\forall$ 右)

$$\frac{F(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x F(x), \Gamma \to \Delta} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, F(a)}{\Gamma \to \Delta, \forall x F(x)}$$

($\exists$ 左)　($\exists$ 右)

$$\frac{F(a), \Gamma \to \Delta}{\exists x F(x), \Gamma \to \Delta} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, F(t)}{\Gamma \to \Delta, \exists x F(x)}$$

ただし ($\forall$ 右) および ($\exists$ 左) においては、a はその推論規則の下式に現れてはいけない。a を ($\forall$ 右) および ($\exists$ 左) の eigenvariable という。また t は任意の項を表す。

2.4　LK の証明図

1) 公理 $D \to D$ はそれ自身証明図である。そしてこの証明図の始式 (beginning sequent) および終式 (end sequent) はともに $D \to D$ 自身である。

2) 式 S_i を終式とする証明図を $P(S_i)$ とするとき $\dfrac{S_1 \cdots S_n}{S}$ が推論規則ならば $\dfrac{P(S_1) \cdots P(S_n)}{S}$ は証明図である。そしてこの証明図の始式は $P(S_1)$,$\cdots$,$P(S_n)$ の始式であり、この証明図の終式は式 S である。

2.5　LK の証明可能性

式 $\Gamma \to \Delta$ が終式であるような LK の証明図があるとき、$\Gamma \to \Delta$ は LK で証明可能であるという。

3　LK の各推論規則の従属性

[1] によれば、LK の推論規則のうちいくつかは、別の式を公理として認めたり、他の推論規則を用いたりすることで導くことができる。

たとえば、($\wedge$ 左 1) を用いて式 $A \wedge B \to A$ の LK での証明可能性を導くことができ (図 1)、逆に $A \wedge B \to A$ を公理として認めれば、($\wedge$ 左 1) は LK で許される推論である (図 2)。この意味で、($\wedge$ 左 1) と式 $A \wedge B \to B$ は同値であり、($\wedge$ 左 1) をこの式でおきかえることができる。

(図 1)

$$\frac{A \to A}{A \land B \to A}(\land左1)$$

(図 2)

$$\frac{A \land B \to A \quad A, \Gamma \to \Delta}{A \land B, \Gamma \to \Delta}(cut)$$

これと同様に、以下に述べる各推論は、右側に書かれた同値な式でおきかえることができる。

(∧ 右) $A, B \to A \land B$

(∧ 左 1) $A \land B \to A$　(∧左 2)$A \land B \to B$

(∨ 右 1) $A \to A \lor B$　(∨右 2)$B \to A \lor B$

(∨ 左) $A \lor B \to A, B$

(¬ 右) $\to A, \neg A$

(¬ 左) $\neg A, A \to$

(⊃ 左)$A, A \supset B \to B$

(∀ 左) $\forall x F(x) \to F(t)$

(∃ 右) $F(t) \to \exists x F(x)$

(∧ 左 1) のときと同様に、(∨ 右 1) と (∀ 左) に対して、対応する式との同値性を示す。

(∨ 右 1) のときは、次の 2 つの図によって示される。

$$\frac{A \to A}{A \to A \lor B}(\lor右1)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad A \to A \lor B}{\Gamma \to \Delta, A \lor B}(cut)$$

(∀ 左) のときは、次の 2 つの図によって示される。

$$\frac{F(t) \to F(t)}{\forall x F(x) \to F(t)}(\forall 左)$$

$$\frac{\forall x F(x) \to F(t) \quad F(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x F(x), \Gamma \to \Delta}(cut)$$

上にあげた式を公理とすれば、推論規則は構造に関する推論規則のほか (⊃ 右),(∀ 右),(∃ 左) だけで十分である。

4　推論規則の従属性

この節では、命題論理の範囲で考える。次の 6 つの式が LK で証明可能かどうかを調べ、証明可能であれば、それらを公理として認め、LK の推論規則を導くことができるかどうか調べる。

A$\supset (B \supset C) \to (A \supset B) \supset (A \supset C)$

$\neg A \supset \neg B \to B \supset A$

A$\land B \to \neg(A \supset \neg B)$

$\neg(A \supset \neg B) \to A \land B$

A$\lor B \to \neg A \supset B$

$\neg A \supset B \to A \lor B$

上にあげた式の LK での証明可能性はその証明図を書くことで示される。次に、これらを公理として認め、LK の推論規則において従属性を調べた。そして導かれた各推論規則に対し、それを導くのに用いられた公理、および用いられた推論規則で (⊃ 右)、(¬ 左) 以外のものは、次のようにまとめられる。

(∧ 左 1):　A$\land B \to \neg(A \supset \neg B)$

(∧ 左 2):　A$\land B \to \neg(A \supset \neg B)$

(∧ 右):　(⊃ 左),$\neg(A \supset \neg B) \to A \land B$

(∨ 左):　(⊃ 左), A$\lor B \to \neg A \supset B$

(∨ 右 1):　$\neg A \supset B \to A \lor B$

(∨ 右 2):　$\neg A \supset B \to A \lor B$

(⊃ 左):　$A \supset (B \supset C) \to (A \supset B) \supset (A \supset C)$

(¬ 右):　(⊃ 左), $\neg A \supset \neg B \to B \supset A$

よって上の 6 つの式を LK の公理として認めれば、LK から (∧ 左 1)、(∧ 左 2)、(∧ 右)、(∨ 左)、(∨ 右 1)、(∨ 右 2)、(⊃ 左)、(¬ 右) を除くことができる。

次に、次の 6 つの式が、LK で証明可能かどうかを調べ、証明可能であれば、それらを公理として認め、LK の推論規則を導くことができるかどうかを調べる。

A$\land B \to \neg(A \supset \neg B)$

$\neg(A \supset \neg B) \to A \land B$

$\neg A \lor B \to A \supset B$

$A \to A \lor B$

$A \lor B \to B \lor A$

$B \supset C \to A \lor B \supset A \lor C$

上にあげた式の LK での証明可能性はその証明図を書くことで示される。次にこれらを公理として認め、LK の推論規則において従属性を調べた。そして導かれた各推論規則に対し、用いられた公理は、次のようにまとめられる。ここで用いられた推論規則は、(⊃ 右)、(⊃ 左)、(¬ 右)、(¬ 左) のみである。

(∧ 左 1):　$A \land B \to \neg(A \supset \neg B)$

(∧ 左 2):　$A \land B \to \neg(A \supset \neg B)$

(∧ 右):　$\neg(A \supset \neg B) \to A \land B$

(∨ 左):　$\neg A \lor B \to A \supset B$　$A \lor B \to B \lor A$

　　$B \supset C \to A \lor B \supset A \lor C$

(∨ 右 1):　A$\to A \lor B$

(∨ 右 2):　A$\to A \lor B$

　　$B \lor A \to A \lor B$

よって上の 6 つの式を LK の公理として認めれば、LK から (∧ 左 1)、(∧ 左 2)、(∧ 右)、(∨ 左)、(∨ 右 1)、(∨ 右 2) を除くことができる。

5　おわりに

今回の研究では、推論規則の従属性について深く考えることができた。

6　謝辞

本研究を進めるに当たり、多大な助言を頂き、また熱心にご指導下さいました佐々木克巳助教授に深く感謝致します。

参考文献

[1] 松本和夫, 複刊 数理論理学, 共立出版 (2001.8)