様相論理におけるシークエント計算とクリプキモデル

2000MM054 宮嶋 智久
指導教員 佐々木 克巳

1 はじめに

小野 [1] では様相論理研究の必要性、およびそれを研究する 2 つの立場を次のように述べている。

日常的な思考の中に現れる推論は多くの場合、その推論が行われる状況や時間の前後関係などのさまざまな因子を含んでいる。そのような推論形式を分析するために様相論理を導入する。本研究の対象は、これらの様相論理のうち代表的なものである。

一般に論理を研究する場合には、二つの立場がある。第一のものは論理式を記号の列としてとらえ、そのような記号列に対する機械的、記号的操作としての推論や証明の構造を研究する立場である。この立場からの研究をシンタクス (syntax, 構文論) という。 第ニのものは、論理式が表現している意味や内容に基づき、集合や写像などの概念を使って論理を研究する立場である。これはセマンティクス (semantics, 意味論) とよばれる。

ここでは、[1] にしたがって、シンタクスとセマンティクスの理解を深める。具体的には、シンタクスの立場からは、シークエント計算を用い、いろいろな様相論理に対していくつかの形の定義を与える。セマンティクスの立場からはクリプキによるセマンティクスを用いる。そして健全性の証明を理解する。

2 様相

様相論理では、

(1) 必然的に A である

ことを、普通は記号 $\Box$ を使って $\Box A$ と表す。このとき $\Box\neg A$ は

(2)A でないことは必然的である

を意味することになる。(2) の否定、すなわち $\neg\Box\neg A$ を $\Diamond A$ と表す。$\Diamond A$ は

(4)A である可能性がある

ことを意味することになる。

3 いろいろな様相論理

定義 3.1 様相論理の論理式

(1) それぞれの命題変数は論理式である。

(2)A、B がともに論理式ならば、$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \supset B)$,$(\neg A)$,$(\Box A)$ はいずれも論理式である。

しばしば、$\neg\Box\neg A$ を $\Diamond A$ と省略する。

シークエント計算の体系は式と呼ばれるものを基本表現として与える。式とは

$A_1, \cdots, A_m \to B_1, \cdots, B_n$

という形をした表現である。ここで m や n は 0 でもよい。

様相論理に対するシークエント計算の体系は古典命題論理に対するシークエント計算の体系 LK をもとに与えられる。LK は、LK の公理と LK の推論規則から定義される。LK の公理は

$A \to A$

という形の式である。LK の推論規則は全部で 17 個あり、構造に関する推論規則 7 個と論理結合子に関する推論規則 10 個に分けられる。

次にいくつかの様相論理に対するシークエントの体系を与える。まず始めに、もっとも基本的な様相論理である K の体系を導入する。

定義 3.2 体系 K

体系 K は古典命題論理の シークエント計算の体系 LK に、さらに $\Box$ に関するつぎの推論規則をつけ加えたものである。

$$\frac{\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}(\Box)$$

ただし、Γ が列 $B_1,\cdots,B_m$ であるとき $\Box\Gamma$ は $\Box B_1,\cdots,\Box B_m$ という列を表すものとする。

推論規則として $(\Box)$ を含むような様相論理を正規な様相論理という。正規な様相論理を定義するために、いくつかの論理式の型 $X_1,\cdots,X_k$ に対し、始式として

$\to X_i \qquad (i = 1,\cdots,k)$

をつけくわえるということを行う。このようにして定義される様相論理を $KX_1 \cdots X_k$ と表す。また、これらの $X_1,\cdots,X_k$ をこの様相論理の公理型 (axiom scheme) という。ここで代表的な公理型をあげておく。

$D : \Box A \supset \Diamond A$

$T : \Box A \supset A$

$4 : \Box A \supset \Box\Box A$

$B : A \supset \Box\Diamond A$

$5 : \Diamond A \supset \Box\Diamond A$

これらの公理型より、$KD, KT, KT4, KT5$ などが定義される。KT において T の代わりに式

$T' : \Box A \to A$

をとった体系を KT' とする。このとき、KT' と KT とは本質的に同じである。すなわち次が成立する

定理 3.3

$\Gamma \to \Delta \in KT \Longleftrightarrow \Gamma \to \Delta \in KT'$

この意味で、T は T' でおきかえることができる。同様に、

$D' : \Box A \to \Diamond A$

$4' : \Box A \to \Box\Box A$

$B' : A \to \Box\Diamond A$

$5' : \Diamond A \to \Box\Diamond A$

とおくと、$D, 4, B, 5$ はそれぞれ $D', 4', B', 5'$ でおきかえることができる。

また、公理型 $D, T, 4, B, 5$ はそれぞれそれらに「双対」な次の公理型でおきかえることもできる。

$D^* :\ \Box A \supset \Diamond A$

$T^* :\ A \supset \Diamond A$

$4^* :\ \Diamond\Diamond A \supset \Diamond A$

$B^* :\ \Diamond\Box A \supset A$

$5^* :\ \Diamond\Box A \supset \Box A$

様相論理のうちのいくつかについては □ に関する推論規則を導入することにより定義することもできる。KT は式 T' の代わりに (□ 左) を使えば定義できる。また、$S4$ は (□ 左) と (□ 右 $- S4$) を用いて定義できる。

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}(\Box\ 左) \qquad \frac{\Box\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}(\Box\ 右 - S4)$$

すなわち、K に (□ 左) を加えた体系を KT^I と表し、LK に (□ 左) と (□ 右 $- S4$) を加えた体系を $S4^I$ と表したとき、次が成立する。

定理 3.4

(1)$\Gamma \to \Delta \in KT \Longleftrightarrow \Gamma \to \Delta \in KT^I$

(2)$\Gamma \to \Delta \in S4 \Longleftrightarrow \Gamma \to \Delta \in S4^I$

4　クリプキによるセマンティクス

定義 4.1 クリプキ・フレーム

空でない集合 M と M 上の二項関係 R の対 (M, R) を様相論理に対するクリプキ・フレームという。

定義 4.2 クリプキ・モデル

(M, R) をフレームとする。また V を各命題変数 p に対し $V(p) \subseteq M$ となるような写像とする。このとき、V をフレーム (M, R) 上の付値という。そして、この 3 つの組 (M, R, V) をクリプキ・モデルという。与えられたクリプキ・モデル (M, R, V) に対し、M の要素と論理式の間の二項関係 $\models$ をつぎのように帰納的に定義する。

(1)$a \models p \Longleftrightarrow a \in V(p)$($p$ は命題変数)

(2)$a \models A \wedge B \Longleftrightarrow a \models A$ かつ $a \models B$

(3)$a \models A \vee B \Longleftrightarrow a \models A$ または $a \models B$

(4)$a \models A \supset B \Longleftrightarrow a \models A$ でないか、または $a \models B$

(5)$a \models \neg A \Longleftrightarrow a \models A$ でない

(6)$a \models \Box A \Longleftrightarrow aRb$ となるすべての b に対し $b \models A$

$a \models A$ であるとき、「(可能世界)a で A は真である」という。「$a \models A$ でない」ことは $a \not\models A$ とあらわす。

関係 $\models$ は付値 V から一意的に定まるので、今後は V と $\models$ を同一視して、$\models$ のことを付値といったり、$(M, R, \models)$ のことをクリプキ・モデルといったりする。上の定義 4.1 の (1) よりこのようないい方をしても混乱は生じない。

定義 4.3 恒真な論理式

フレーム (M, R) 上の任意の付値 $\models$ と M の任意の要素 a に対して $a \models A$ となるとき、論理式 A は (M, R) で恒真であるという。

定理 4.4

任意のフレーム (M, R) に対し次のことがなりたつ。

(1)T が (M, R) で恒真 $\Longleftrightarrow R$ は反射的

(どの x に対しても xRx)

(2)4 が (M, R) で恒真 $\Longleftrightarrow R$ は推移的

(xRy かつ yRz ならば、xRz)

(3)D が (M, R) で恒真 $\Longleftrightarrow R$ は継続的

(どの x に対してもある y が存在して xRy)

(4)B が (M, R) で恒真 $\Longleftrightarrow R$ は対称的

(xRy ならば yRz)

(5)5 が (M, R) で恒真 $\Longleftrightarrow R$ はユークリッド的

(xRy かつ xRz ならば、yRz)

5　健全性の証明

体系 K での証明可能性とクリプキフレームでの恒真性は本質的に同じであることが知られている。この性質の一部である健全性の証明を行う。

定義 5.1 論理式の列 $A_1, \cdots, A_m$ を Γ と表すとき、論理式 Γ^*およびΓ_* を以下のように定める。

$m > 0$ のとき、

$\Gamma^* = A_1 \vee \cdots \vee A_m$

$\Gamma_* = A_1 \wedge \cdots \wedge A_m$

$m = 0$ のとき、

$\Gamma^* = \neg(p \supset p)$

$\Gamma_* = p \supset p$

式 $\Gamma \to \Delta$ が恒真であるとは論理式 $\Gamma_* \supset \Delta^*$ が恒真であることとする。

定理 5.2(K の健全性) 任意の式 $\Gamma \to \Delta$ に対し、$\Gamma \to \Delta$ が様相論理 K で証明可能ならば、$\Gamma \to \Delta$ は任意のフレームで恒真である。

このことを示すにはつぎの (1),(2) を証明すればよい。

(1) 任意の始式は恒真である。

(2) それぞれの推論規則において上式が恒真ならば、下式も恒真である。

6　謝辞

本研究を進めるにあたり、南山大学数理情報学部数理科学科の佐々木克巳助教授に深く感謝致します。

参考文献

[1] 小野寛晰,「情報科学における論理」, 日本評論社 (1994).