無理数と超越数
– リューヴィル数の値の超越性 –

2000MM088 田中　紘成
指導教員　宮元　忠敏

1　はじめに

[2] より，数，そして数学の発展をたどると，分数は紀元前 1700 年頃の古代エジプトで使われており，かなり早い時代から登場しているのに対し，無理数が考えられだしたのはおよそ 2500 年前のギリシャだった．その間ずっと人々は有理数が数のすべてであると考えていたのである．そして，さらに 100 年近い歳月を経て，超越数が発見されたのである．

研究の前半では有理数と無理数による近似，実数の g 進展開など無理数論の基礎的な部分を扱ってきた．これは，無理数と超越数が深いかかわりをもっているからである．これによって無理数の発見から超越数の発見までの道のりが垣間見える．連分数については，連分数の表し方．実数の連分数展開．2 次無理数の連分数展開などを確認する．連分数展開には最良近似という性質があり，その性質は無理数を有理数で近似するよりも高い精度で近似することができる．そしてメインの代数的数と超越数では主に，代数的数と超越数の関係．リューヴィル級数の超越性，フレドホルム級数の超越性を扱う．とくに注目してほしいのが，自分で超越数作りに挑戦したことである．リューヴィル級数を真似て，tanaka 数 1，tanaka 数 2，tanaka 数 3，を作った．以後の研究は [1] に基づいて行った．

2　有理数と無理数

有理数でない実数を無理数という．有理数と無理数は有理数による近似の度合いによって区別される．有理数 $\alpha = a/b \ \ (b > 1)$ に対して，すべての有理数 $p/q \neq \alpha$ は不等式

$$|q\alpha - p| = \frac{|aq - bp|}{b} \geq \frac{1}{b}$$

を満たす．ここで，0 でない整数の絶対値が 1 以上であることを用いた．よって，次の定理を得る．

定理 1

有理数 α に対して，α にのみ依存する正定数 c が存在し，不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q},\ c = \frac{1}{2b} \quad \text{ただし，} b \text{ は} \alpha \text{の分母}$$

がすべての有理数 $p/q \neq \alpha \ \ (b > 0)$ に対して成り立つ．

この定理を用いて無理数の判別する次の系が求まる．

系

実数 α に対して

$$0 < |q_n\alpha - p_n| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

を満たす整数列 $p_n, q_n \ \ (n \geq 0)$ が存在するならば，α は無理数である．

3　連分数

有理数と無理数の分野では，無理数を有理数で近似したわけだが，連分数を用いることによって，有理数よりもさらに精度が高く無理数を近似することができる．

$a_0, a_1, \cdots; b_0, b_1, \cdots$ を変数とする．

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_N}}}}$$

を正則連分数といい，$[a_0; a_1, \ldots, a_N]$ と略記する．上式は末尾の方から通分していくと $a_0, a_1, \ldots, a_N$ を変数とする二つの多項式の比になる．たとえば

$$[a_0] = \frac{a_0}{1},$$
$$[a_0; a_1] = \frac{a_1a_0 + 1}{a_1},$$
$$[a_0; a_1, a_2] = \frac{a_2a_1a_0 + a_2 + a_0}{a_2a_1 + 1}.$$

と表すことができる．

定義

整係数 2 次方程式の実解となる無理数を 2 次無理数と呼ぶ．

2 次無理数の連分数展開

無限単純連分数 $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ は $a_n = a_{n+l}$ $(n \geq m)$ となる l と m が存在するとき周期的であると呼ばれ，次のように略記される．

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, \dot{a}_m, \ldots, \dot{a}_{m+l-1}].$$

例 1　$\sqrt{2} = [1; 2, 2, \ldots] = [1; \dot{2}],$
$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1; \dot{1}, \dot{2}],$

$$\sqrt{5} = [2; 4, 4, \dots] = [2; \dot{4}].$$
$$\sqrt{6} = [2; 2, 4, 2, 4, \dots] = [2; \dot{2}, \dot{4}],$$
$$\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots] = [2; \dot{1}, 1, 1, \dot{4}].$$

定理 2　(J.L.Lagrange)

周期的単純連分数は 2 次無理数を表す．逆に 2 次無理数の単純連分数展開は周期的である．

これを用いて最良近似をすることができる．

定理 3

2 次無理数 α に対し， α のみに依存する正定数 c が存在して

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^2}$$

がすべての有理数 p/q $(q > 0)$ に対して成り立つ．

4　代数的数と超越数

整数 $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n$ を係数とする多項式

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

の解，すなわち $P(x) = 0$ となる複素数 α を代数的数という．

代数的数でない複素数を超越数という．実超越数はもちろん無理数である． m 個の複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ に対して，m 変数の整係数多項式 $P(x_1, \dots, x_m) \neq 0$ が存在して

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$$

が成り立つとき，$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は代数的従属であるという．$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ が代数的従属でないとき代数的独立であるという．このとき $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ はいずれも超越数である．

リューヴィル (1844) は，定理 1 の不等式を用いて超越数の存在をはじめて証明した．

定理 4　(リューヴィルの不等式)

$n(\geq 2)$ 次実代数的数 α に対して，正定数 $c = c(\alpha)$ が存在し，不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$$

がすべての有理数 p/q $(q > 0)$ に対して成り立つ．

実数 α で任意の正整数 ν に対して不等式

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\nu}$$

が少なくとも一つの有理数解 p/q $(q \geq 2)$ をもつようなものを，総称してリューヴィル数と呼ぶ．リューヴィル級数の具体例として $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k!}$ があり，リューヴィル数はすべて超越数である．カントール (G.Cantor, 1874) は，実数が非可算個あることを証明した．整数係数多項式は可算個しかなく，各多項式は有限個の解しかもたないから，代数的数は可算個しかない．したがって，ほとんどすべての複素数は，超越数ということになる．しかし，この事実から超越数の具体例を一つも示すことはできない．また，与えられた数が超越数であるかどうかについて何らの結論も引き出すことはできない．

5　tanaka 数

定理 5

代数的数 α $(0 < |\alpha| < 1)$ に対し，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k!}$$

は超越数である．

この定理 5 を用いて，リューヴィル数に似せた数 (tanaka 数とする) をいくつか考えてみた．

tanaka **数** 1　$\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty} h\alpha^{h!}$

tanaka **数** 2　$\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty} h^2\alpha^{h!}$

tanaka **数** 3　$\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha^{h!}}{h}$

tanaka 数は有理数と無理数の (系) によって無理数であることを確認することができた．しかし，リューヴィル数のところでも述べたとおり，この数が超越数であるかどうかは確認することができなかった．

6　終わりに

今回，自分で作った tanaka 数が無理数であることまでは確認できたが，超越数であるかどうかを確認することができなかった．有理数と無理数から始まり，実数の g 進展開，連分数を通して数の近似をし，そして超越数に入ったわけだが，ほとんどすべての複素数が超越数であるということまでわかったのに，その具体例を示すことも，また超越数であるかどうかについての結論も引き出すことはできなかった．今回，超越数のほんの入り口にたどりついただけであり，扱ったリューヴィル数も超越数のほんの氷山の一角に過ぎない．

参考文献

[1] 塩川宇賢：無理数と超越数, 森北出版 (2000).
[2] 鈴木治朗：はじめての数論, ピアンソン・エデュケーション (2001).