オプションプライシングについて

2000MM050 前田 智之
指導教員　國田 寛

1　はじめに

オプションとは, 金融派生証券を売買する「権利」のことである．そして, オプションの価格を与えるのが Black-Scholes 式である. Black-Scholes 式の導出方法はいくつか発表されている．2 項モデルの極限を考える方法, 偏微分方程式を解く方法等である．本研究 3 では Black-Scholes 式を Cox,Ross and Rubinstein[1] の方法に従って導出し, 本研究 4 では Black-Scholes の偏微分方程式をテイラー展開を利用して導出した.

2　オプションの価値

2 項モデルとは時刻 t での資産を所与としたとき, 時刻 $t+1$ の資産価格のとりうる値が 2 つしかない価格変動モデルである. 時刻 t での株価が S のコールオプションの価格 $C(t,S)$ が, $\frac{1}{n}$ 時間ごとに取引を行うとすると,

$$C\Big(\frac{i}{n},S\Big)=\frac{1}{r^{nT-i}}\sum_{k=0}^{nT-i}\begin{pmatrix} nT-i \\ k \end{pmatrix}P^k(1-P)^{nT-i-k} \times\max\{u^kd^{nT-i-k}S-K,0\} \qquad (1)$$

となる. 次に $\frac{1}{r}\{PC_u+(1-P)C_d\}$ を考えると,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}\{PC_u+(1-P)C_d\}\\ &=\frac{1}{r}\Big\{PC\Big(\frac{i+1}{n},uS\Big)+(1-P)C\Big(\frac{i+1}{n},dS\Big)\Big\} \qquad (2)\end{aligned}$$

と表すことが出来る. (2) 式を計算すると,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}\Big\{PC\Big(\frac{i+1}{n},uS\Big)+(1-P)C\Big(\frac{i+1}{n},dS\Big)\Big\}\\ &=\frac{1}{r^{nT-i}}\sum_{k=0}^{nT-i}\begin{pmatrix} nT-i \\ k \end{pmatrix}P^k(1-P)^{nT-i-k}\\ &\quad\times\max\{u^kd^{nT-i-k}S-K,0\}\\ &=C\Big(\frac{i}{n},S\Big)\end{aligned}$$

従って (3) 式が導出される.

$$C\Big(\frac{i}{n},S\Big)=\frac{1}{r}\{PC_u+(1-P)C_d\} \qquad (3)$$

3　Black-Scholes 式の証明

σ	:	ボラティィリティ	r	:	金利
K	:	権利行使価格	T	:	満期
S	:	時刻 t での株価	n	:	時間の分割数
P	:	アップする確率	u,d	:	アップ, ダウン

コールオプションの価格 $C\Big(\frac{i}{n},S\Big)$ は (1) 式で与えられる. 各期に確率 $\frac{1}{2}$ で $1+\frac{r}{n}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 上昇するか, 確率 $\frac{1}{2}$ で $1+\frac{r}{n}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 下降するとすれば

$$\begin{aligned}C\Big(\frac{i}{n},S)\Big)&=\frac{1}{\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{nT-i}}\sum_{k=0}^{nT-i}\begin{pmatrix} nT-i \\ k \end{pmatrix}\times\\ &\Big(\frac{1}{2}\Big)^{nT-i}\max\Big\{\Big(1+\frac{r}{n}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)^k\times\\ &\Big(1+\frac{r}{n}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)^{nT-i-k}S-K,0\Big\} \qquad (4)\end{aligned}$$

ここで $i=0$ の時の価格を考える. (4) 式を満たす最小の k を $k(T)$ とすれば, コールオプションの価格は,

$$\begin{aligned}C(0,S)=&\frac{1}{\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{nT}}\Big[\sum_{k=k(T)}^{nT}\begin{pmatrix} nT \\ k \end{pmatrix}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{nT}\times\\ &\Big(1+\frac{r}{n}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)^k\Big(1+\frac{r}{n}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)^{nT-k}S\\ &-K\sum_{k=k(T)}^{nT}\begin{pmatrix} nT \\ k \end{pmatrix}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{nT}\Big] \qquad (5)\end{aligned}$$

と表すことが出来る. ここで,

$$P_u=\frac{1+\frac{r}{n}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\Big(1+\frac{r}{n}\Big)},P_d=\frac{1+\frac{r}{n}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\Big(1+\frac{r}{n}\Big)}$$

とおけば, (5) 式の第 1 項目は,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{nT}}\sum_{k=k(T)}^{nT}\begin{pmatrix} nT \\ k \end{pmatrix}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{nT}\times\\ &\Big(1+\frac{r}{n}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)^k\Big(1+\frac{r}{n}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)^{nT-k}S\\ &=\sum_{k=k(T)}^{nT}\begin{pmatrix} nT \\ k \end{pmatrix}(P_u)^k(P_d)^{nT-k}S\end{aligned}$$

となる. この分布の平均は P_unT, 分散は P_uP_dnT である. 中心極限定理を用いればこの確率は標準正規分布が $\frac{k(T)-nTP_u}{\sqrt{nTP_uP_d}}$ 以上の値を持つ確率で近似される.

次に, (5) 式の第 2 項目の

$$\frac{1}{\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{nT}}K\sum_{k=k(T)}^{nT}\begin{pmatrix} nT \\ k \end{pmatrix}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{nT}$$

を考える. $n\to\infty$ とすると $\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{nT}\to e^{rT}$ となる. この場合, 平均は $\frac{nT}{2}$, 分散は $\frac{nT}{4}$ になる.

従って中心極限定理を用いれば, この確率は標準正規分布が $\frac{(k(T)-\frac{nT}{2})}{\sqrt{\frac{nT}{4}}}$ 以上の値を取る確率に近づく.

以上を合わせて, 標準正規分布の分布関数を用いると,

$$
\begin{aligned}
C(0,S) \sim & S\Phi\Big[\frac{-(k(T)-P_u nT)}{\sqrt{P_u P_d nT}}\Big] \\
& -Ke^{-rT}\Phi\Big[\frac{-\Big(k(T)-\frac{nT}{2}\Big)}{\sqrt{\frac{nT}{4}}}\Big]
\end{aligned}
$$

を得る. ただし Φ は標準正規分布で

$$
\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}dx
$$

である. 平均 $(P_u nT)$ と分散 $(P_u P_d nT)$, $k(T)$ を求め, これらをまとめると,

$$
\begin{aligned}
C(0,S) \sim & S\Phi\Big(\frac{\log\frac{S}{K}+\Big(r+\frac{\sigma^2}{2}\Big)T}{\sigma\sqrt{T}}\Big) \\
& -Ke^{-rT}\Phi\Big(\frac{\log\frac{S}{K}+\Big(r-\frac{\sigma^2}{2}\Big)T}{\sigma\sqrt{T}}\Big)
\end{aligned}
$$

これが, Black-Scholes 式である.

4 偏微分方程式の導出

コールオプションの価格 $C\Big(\frac{i}{n},S\Big)$ は (3) 式で与えられる.

$$
C\Big(\frac{i}{n},S\Big) = \frac{1}{r}\{PC_u+(1-P)C_d\} \tag{6}
$$

次に (6) 式を変形し u,d に対してテイラー展開する. $u=1+u'$, $d=1+d'$ とおいて (6) 式の右辺をテイラー展開すると

$$
C\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)+C'\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)S\{Pu'+(1-P)d'\} \tag{7}
$$

$$
+\frac{1}{2!}C''\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)S^2\{Pu'^2+(1-P)d'^2\} \tag{8}
$$

ここで $Pu'+(1-P)d'$, $Pu'^2+(1-P)d'^2$ をそれぞれ計算する. まず $Pu'+(1-P)d'$ を考える.

$$
\begin{array}{cccccc}
u & = & e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} & d & = & e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \\
r & = & e^{\frac{r}{n}} & P & = & \frac{e^{\frac{r}{n}}-e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}-e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}
\end{array}
$$

それぞれを代入してテイラー展開すれば,

$$
Pu'+(1-P)d' = \frac{r}{n}
$$

次に $Pu'^2+(1-P)d'^2$ を考えれば,

$$
Pu'^2+(1-P)d'^2 = \frac{\sigma^2}{n}
$$

従って (6) 式を整理して書くと

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{r}{n}}C\Big(\frac{i}{n},S\Big) = & C\Big(\frac{i+1}{n},S\Big) \\
& +\frac{r}{n}C'\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)S+\frac{1}{2!}\frac{\sigma^2}{n}C''\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)S^2
\end{aligned}
$$

両辺から $C\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)$ を引き n 倍すれば

$$
\begin{aligned}
& \frac{e^{\frac{r}{n}}-1}{\frac{1}{n}}C\Big(\frac{i}{n},S\Big)-\frac{C\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)-C\Big(\frac{i}{n},S\Big)}{\frac{1}{n}} \\
& = rC'\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)S+\frac{1}{2!}\sigma^2C''\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)S^2 \quad (9)
\end{aligned}
$$

次に関数 $C_n(t,S)$ を

$$
\begin{aligned}
C_n(t,S) = & \frac{C\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)-C\Big(\frac{i}{n},S\Big)}{\frac{1}{n}}\Big(t-\frac{i}{n}\Big)+C\Big(\frac{i}{n},S\Big) \\
& \frac{i}{n}<t<\frac{i+1}{n} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

によって定義し, $\lim C_n(t,S)$ を $C(t,S)$ とする. このとき (10) 式を t について微分すると,

$$
\frac{\partial}{\partial t}Cn(t,S) = \frac{C\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)-C\Big(\frac{i}{n},S\Big)}{\frac{1}{n}}
$$

さらに $\frac{\partial}{\partial t}Cn(t,S) \to \frac{\partial}{\partial t}C(t,S)$ より,

$$
\frac{C\Big(\frac{i+1}{n},S\Big)-C\Big(\frac{i}{n},S\Big)}{\frac{1}{n}} \to \frac{\partial}{\partial t}C(t,S)
$$

となる. さらに $n\to\infty$, $i\to\infty$ かつ $\frac{i}{n}\to t$ のとき,

$$
C\Big(\frac{i}{n},S\Big) \to C(t,S)
$$

また S について微分・2 階微分すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial S}C\Big(\frac{i}{n},S\Big) & \to \frac{\partial}{\partial S}C(t,S) \\
\frac{\partial^2}{\partial S^2}C\Big(\frac{i}{n},S\Big) & \to \frac{\partial^2}{\partial S^2}C(t,S)
\end{aligned}
$$

となる. 従って (9) 式は以下となる.

$$
rC-\frac{\partial C}{\partial t} = rS\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}
$$

これが, Black-Scholes の偏微分方程式である.

謝辞

最後に本研究を進めるにあたり, 御指導頂きました指導教員の國田寛教授をはじめ, 有益な助言を頂きました鈴木先輩や瀬古先輩, 八木先輩には心から感謝します.

参考文献

[1] J. C. Cox, S. A. Ross and M. Rubinstein: Option Pricing, A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263(1979).