オプションプライシングについて
− ブラックショールズモデル −

2000MM044 久保 典子

指導教員　國田 寛

1　はじめに

本論文では, 原資産と安全資産からなるポートフォリオでオプションを複製し, 裁定機会が起こらないようにリスク中立確率を決定しながら, 単純な離散時間モデルのオプションを公式として示していく. (参 [1])

2　2 項オプションの価格決定

株価が離散時間で動く 2 項モデルと仮定し, 図を使い, 2 項オプションの価格決定式を導き出して行く. 現在価格は S とし, 上昇を u または下降を d と表し, コールの価値は C と表す. Δ は株の単位であり B は安全資産のことである. p は確率で, もし実際に投資家がリスク中立的であるとき, $p=q$ となる. 理論的にはリスクのない裁定機会が存在するように行動し利益を得ることができるが, 現実にはリスクのない裁定機会は存在しない.
コールの価値を表す式は,

$$C=[\sum_{j=0}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})p^j(1-p)^{n-j}max[0,u^jd^{n-j}S-K]]/r^n$$

$$r>1,\ \ p\equiv\frac{r-d}{u-d},1-p\equiv\frac{u-r}{u-d} \tag{1}$$

インザマネーで終了するために $u^a d^{n-a}S>K$ を満たすような非負の最小値を a とする.
利益を出すためのコールの価値は

$$C=[\sum_{j=a}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})p^j(1-p)^{n-j}[u^jd^{n-j}S-K]]/r^n$$

となり, この式を 2 つの項に分けて表すと

$$C=S[\sum_{j=a}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})p^j(1-p)^{n-j}(\frac{u^jd^{n-j}}{r^n})]$$
$$-Kr^{-n}[\sum_{j=a}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})p^j(1-p)^{n-j}] \tag{2}$$

である. これは 2 項モデルでのヨーロピアンオプションのコールの価値を示している. 1 項目と 2 項目の二項分布関数をそれぞれ $\Phi[a;n,p']$ と $\Phi[a;n,p]$ と書き表す.
ただし,

$$p^j(1-p)^{n-j}(\frac{u^jd^{n-j}}{r^n})=p'^j(1-p')^{n-j} \tag{3}$$
$$(p'\equiv(u/r)p,\quad 1-p'\equiv(d/r)(1-p))$$

つまりこれまでのことから, 二項オプション公式を次の段のような図にまとめる.

3　$n\to\infty$ の場合

本節では, $n\to\infty$ の場合について考えていく. t は固定長さのカレンダータイムを, n は満期までの長さ h の期間の数を示す. つまり, $h=t/n$ である. 期間の長さが固定されているとき, r は 1 期間中の利率とカレンダータイムの間の利率の両方を表すとし, カレンダータイム上の利率 $r+1$ を r, 長さ h の 1 期間上の利率 $r+1$ を $\hat{r}$ と表す. 満期までの n 期間の間の総収入は $\hat{r}^n$ となり, 経過時間 t での総収入は, r^t となる. つまり, $\hat{r}^n=r^t$ である.
$n\to\infty$ とすると, 株価は絶えず連続的に変動する場合と, 突然不連続に変動をする場合がある. これらは, 簡単な 2 項過程から導き出せる.

$C=S\Phi[a;n,p']-Kr^{-n}\Phi[a;n,p]$
$p\equiv(r-d)/(u-d)$ かつ $p'\equiv(u/r)p$
$a>\log(K/Sd^n)/\log(u/d)$:非負の最小整数
$a>n$ とき, $C=0$

3.1　ジャンプ過程オプション

各期間で株価が u(確率 q) と d(確率 $1-q$) で 1+ 収益率となると仮定する. また u と d を対数でとる時, 各期間での株の連続複利収益率= $\log u$, $\log d$ を与える. 株価が u,d,u,u,d という動きをする場合を考えるとする. つまり $S^*/S=u^3d^2$ であるので, $\log(S^*/S)=3\log u+2\log d$ となる. これを一般化すると,
$\log(S^*/S)=j\log u+(n-j)\log d=j\log(u/d)+n\log d$
(j は n 期間に上昇する回数) といった形になり, その期待値と分散は,

$$E[\log(S^*/S)]=\log(u/d)\cdot E(j)+n\log d$$
$$Var[\log(S^*/S)]=[\log(u/d)]^2\cdot var(j)$$

$E(j)=nq$, $Var(j)=nq(1-q)$ なので, これら全てを合わせると

$$E[\log(S^*/S)]=[q\log(u/d)+\log d]n\equiv\hat{\mu}n$$
$$Var[\log(S^*/S)]=q(1-q)[\log(u/d)]^2n\equiv\hat{\sigma}^2n$$

が得られる. 実際計算を行う際に $n\to\infty$ とするときの, 原株価と同じ動きをする仮株価の連続複利収益率がいる. これは $n\to\infty$ のとき, $\hat{\sigma}^2n\to\sigma^2t$ であり, すべての n において $\hat{\mu}n=\mu t$ となる. その時 u,d,q はそれぞれ以下の値とする.

$$u=e^{\sigma\sqrt{t/n}},\ d=e^{-\sigma\sqrt{t/n}},\ q=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\mu/\sigma)\sqrt{t/n}$$

このとき以下の条件を満たせば, 中心極限定理を用いることが出来る. $n\to\infty$ である時, もし

$$\frac{q|\log u-\hat{\mu}|^3+(1-q)|\log d-\hat{\mu}|^3}{\hat{\sigma}^3\sqrt{n}}\to 0. \tag{4}$$

ならば, そのとき

$$\mathrm{Prob}[(\frac{\log(S^*/S)-\hat{\mu}n}{\hat{\sigma}\sqrt{n}}) \le z] \to N(z), \qquad (5)$$

このとき $N(z)$ は標準正規分布である. $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mu/\sigma)\sqrt{t/n}$ である. したがって, 株価における倍数2項モデルは, 極限の場合, 対数正規分布も含んでいる. つまり以下を示す.

$$\Phi[a;n,p'] \to N(x), \quad \Phi[a;n,p] \to N(x-\sigma\sqrt{t}). \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} 1-\Phi[a;n,p] &= \mathrm{Prob}[j \le a-1] \\ &= \mathrm{Prob}\left[\frac{j-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \qquad (7) \end{aligned}$$

平均と分散は,

$$\hat{\mu}_p = p\log(u/d) + \log d, \qquad \hat{\sigma}_p^2 = p(1-p)[\log(u/d)]^2.$$

$$\frac{j-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\log(S^*/S) - n\hat{\mu}_p}{\sqrt{n}\hat{\sigma}_p} \qquad (8)$$

$a > \log(K/Sd^n)/\log(u/d)$(最小の自然数) より,

$$a-1 = (\log(K/\ S\ ) - n\log d)/\log(u/d) - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

$$\frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\log(K/S) - \varepsilon\log(u/d) - n\hat{\mu}_p}{\sqrt{n}\hat{\sigma}_p}$$

を得る. これらの結果から,

$$\begin{aligned} &1\ -\Phi[a;n,p] \qquad (9) \\ &= \mathrm{Prob}[\frac{\log(S^*/S)-n\hat{\mu}_p}{\sqrt{n}\hat{\sigma}_p} \le \frac{\log(K/S)-\varepsilon\log(u/d)-n\hat{\mu}_p}{\sqrt{n}\hat{\sigma}_p}] \end{aligned}$$

$$p \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\log r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}. \qquad (10)$$

$$\hat{\mu}_p n = t\left(\log r - \frac{1}{2}\sigma^2\right), \ \ \hat{\sigma}_p\sqrt{n} \to \sigma\sqrt{t}$$

これを中心極限定理に適用して, $n \to \infty$ のとき

$$\frac{\log(K/S)-\varepsilon\log(u/d)-n\hat{\mu}_p}{\sqrt{n}\hat{\sigma}_p} \to \frac{\log(K/S)-\left(\log r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}} = z. \qquad (11)$$

標準正規分布の対称性より, $1-N(z) = N(-z)$ である. したがって, $n \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} \Phi[a;n,p] &\to N(-z) = N\left[\frac{S/\log(Kr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}\right] \\ &= N(x-\sigma\sqrt{t}). \ \left(x = \frac{\log(S/Kr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}\right) \end{aligned}$$

$\Phi[a;n,p']$ も同様に求める. ちなみに p' は下のようになる. よって次の段にある図でまとめられる.

$$p' = \frac{u}{r}p \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\log r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}} \qquad (12)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &C = SN(x) - Kr^{-t}N(x-\sigma\sqrt{t}), \\ &\text{ただし}, \ x \equiv \tfrac{\log(S/Kr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}} + \tfrac{1}{2}\sigma\sqrt{t}. \end{aligned}}$$

以下は証明である. $u = u, \ d = e^{\zeta(t/n)}, \ q = \lambda(t/n)$ のとき2項分布はポアソン分布で近似出来る.

$\Phi[a;n,p'] \to \psi[x;y], \quad \Phi[a;n,p] \to \psi[x;y/u]$ を示す.

$$\Phi[a;n,p] = \sum_{j=a}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j} \qquad (13)$$

$$= \sum_{j=a}^{n}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{n}\right)}{(1-p)^j}\frac{(np)^j}{j!}(1-p)^n$$

$$\lim_{p\to 0} np = \frac{t(\log r - \zeta)}{u-1}$$

$$\lim_{p\to 0}(1-p)^n = e^{\left\{-\frac{t(\log r-\zeta)}{u-1}\right\}}$$

これらのことから,

$$\Phi[a;n,p] \to \sum_{j=a}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{t(\log r-\zeta)}{u-1}\right)^j e^{\left\{-\frac{t(\log r-\zeta)}{u-1}\right\}} \qquad (14)$$

これらをすべて合わせる. $\Phi[a;n,p']$ も同様にする.

$$\Phi[a;n,p] \to \sum_{j=x}^{\infty}\frac{e^{-\frac{y}{u}}\left(\frac{y}{u}\right)^i}{i!} \ = \ \psi[x;y/u]$$

$$\Phi[a;n,p'] \to \sum_{j=a}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{ut(\log r-\zeta)}{u-1}\right)^j e^{\left\{-\frac{ut(\log r-\zeta)}{u-1}\right\}}$$

$$= \sum_{j=x}^{\infty}\frac{e^{-y}y^i}{i!} \ = \ \psi[x;y] \qquad \text{従って}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &C = S\psi[x;y] - Kr^{-t}\psi[x;y/u] \\ &y \equiv (\log r - \zeta)ut/(u-1) \\ &x > (\log(K/S) - \zeta t)/\log u \ \text{:非負の最小整数} \\ &\psi[x;y] \equiv \textstyle\sum_{j=x}^{\infty}\frac{e^{-y}y^i}{i!} \end{aligned}}$$

4 おわりに

これでブラックショールズの2項価格式からジャンプ過程の式を導き出す事が出来た. またジャンプ過程はブラックショールズモデルでは捉え切れない現実の動きに対応することが可能な過程である. 多大な助言やご指導下さった方々, 深く感謝申しあげます.

参考文献

[1] J.C.Cox, S.A. Ross and M.Rubinstein: Option Pricing,A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263(1979).