オプション価格における数値解析
–種々の有限差分法の比較検討–

2000MM038 河上 哲 2000MM042 近藤勝士
指導教員　國田 寛

1　はじめに

ファイナンス理論の研究が深化するにつれ, 解析解を得ることが難しい分野や問題が増えてきた. そして, 派生証券の評価を行うためには, 大きくわけて三つの数値解法が考えられている. ツリー法, 有限差分法 [1][2], モンテカルロ法などがある. この中で今回, 有限差分法を取り上げる. 通常ヨーロピアンオプションを評価するときには, ブラックショールズモデルが用いられる. ブラッククショールズモデルは, 株式や通貨を原資産とする派生証券価格が従う偏微分方程式 [3] にコール, またはプットの満期におけるペイオフを初期条件として, 解析的に解いて導出したものである. しかし, オプションがアメリカンタイプの場合や, ペイオフが複雑で解析解が知られていない場合には, 偏微分方程式を数値的に直接解くことが必要になる.
本研究では, 派生証券の挙動を記述する偏微分方程式を有限差分法を用いて表現し, C 言語を用いてプログラムを作成し, 派生証券の価格を数値的に求める.

2　偏微分方程式の解法

配当のない証券の上に書かれたペイオフ関数 $h(x)$ を持つ満期 T の派生証券の時点 t における価格を $f(t,S(t))$ とする. ただし, $S(t)$ は時点 t での証券価格とする.
2 変数関数 $f(t,S)$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}-rf=0 \tag{1}$$

及び, 初期条件 $f(T,S)=h(S)$ をみたす.
r は安全証券の瞬間的な収益率であり,
σ はボラティリティである.

3　有限差分法

有限差分法では (1) の基本偏微分方程式を解くために, 株価と時間平面を考える. 縦軸が株価, 横軸が時間を表す. まずこの 2 次元空間上の長方形を考える. 縦軸の株価は最低値である $Smin$ と, 最高値である $Smax$ の間を, 横軸の時間は時点 0 とオプションの満期に対応する時点の間の点を取りうると考える. これが, 株価の取りうる境界条件である. ブラック・ショールズモデルが想定する連続モデルでは, 株価はこの区間で区切られた平面上のあらゆる値を取りうると想定するが, 数値計算を行うためには, 限られた点上の値を取ると仮定する. 具体的には, この区間の平面を格子上に分割し, 株価はこの格子点上の値のみを取ることができるとする. 連続的な偏微分方程式を離散近似した差分方程式を解いて派生証券の価格を求める. そのためには, 格子点上の株価に対応する, 基本偏微分方程式の値をこの差分方程式で表現する. さらに 3 つの境界条件を考える. 満期時の株価, 株価の最低値, 株価の最高値に対応するこの派生証券からのペイオフを与えられた条件として, 満期日から遡って順次オプション価値を計算する. 最終的には時点 0 におけるすべての株価に対するオプション価値を計算することが可能である.

3.1　有限差分法における数値解法

偏微分方程式を有限差分法により解くということは, すべてのグリッドにおける離散近似解の値を求めるということである. 時間間隔 $[t,T]$ を M 等分し

$$t_i=t+\Delta t, i=0,1,\cdots,M \qquad \Delta t=\frac{T-t}{M}$$

証券価格に関しては, 原理的には状態空間は $[0,\infty)$ であるが, ここでは有限空間 $[S_{min},S_{max}]$ を考えて, それを N 等分する.

$$S_j=S_{min}+j\Delta S, j=0,1,\cdots,N \qquad \Delta S=\frac{S_{max}-S_{min}}{N}$$

よって, 偏微分方程式 (1) の解を離散近似によって求める場合の解の状態空間は
$(t_i,S_j):i\in 0,1,\ldots,M, j\in 0,1,\ldots,N$
これは $(M+1)\times(N+1)$ 個のグリッドからなる空間である.

$$\frac{\partial F}{\partial S}\cong\frac{F_{i+1,j}-F_{i,j}}{\Delta S} \qquad \text{(前方差分)} \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial S}\cong\frac{F_{i,j}-F_{i-1,j}}{\Delta S} \qquad \text{(後方差分)} \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial S}\cong\frac{F_{i+1,j}-F_{i-1,j}}{2\Delta S} \qquad \text{(中心差分)} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\cong\frac{F_{i+1,j}-2F_{i,j}+F_{i-1,j}}{(\Delta S)^2} \qquad \text{(中心差分)} \tag{5}$$

3.1.1　陽的有限差分法

各グリッドにおける偏微分係数の差分近似として $\frac{\partial f}{\partial S}$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ については中心差分, $\frac{\partial f}{\partial t}$ については後方差分を使う. (3), (4), (5) を (1) に代入する

$$f_{i-1,j}=A_jf_{i,j+1}+B_jf_{i,j}+C_jf_{i,j-1}$$

$i = 1, \cdots, M, j = 1, \cdots, N-1$
初期条件は, $f_{M,j} = h(S_j), j = 0, 1, \cdots, N$

$$A_j = \frac{\Delta t}{2\Delta S}(rS_j + \frac{\sigma^2 S_j^2}{\Delta S})$$

$$B_j = 1 - \sigma^2 S_j^2 \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2 - r\Delta t}$$

$$C_j = \frac{\Delta t}{2\Delta S}(-rS_j^2 + \frac{\sigma^2 S_j^2}{\Delta S})$$

3.1.2 陰的有限差分法

各グリッドにおける偏微分係数の差分近似として $\frac{\partial f}{\partial S}$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ については中心差分, $\frac{\partial f}{\partial t}$ については前方差分を使う. (2), (4), (5) を (1) に代入する

$$f_{i+1,j} = A_j f_{i,j+1} + B_j f_{i,j} + C_j f_{i,j-1}$$

$$A_j = -\frac{\Delta t}{2\Delta S}(rS_j + \frac{\sigma^2 S_j^2}{\Delta S})$$

$$B_j = 1 + \sigma^2 S_j^2 \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} + r\Delta t$$

$$C_j = -\frac{\Delta t}{2\Delta S}(-rS_j + \frac{\sigma^2 S_j^2}{\Delta S})$$

3.1.3 クランク ニコルソン法

$\frac{\partial f}{\partial t}$ については前方差分, $\frac{\partial f}{\partial S}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ についてはグリッド (i, j) と $(i+1, j)$ における中心差分の平均値

$$\begin{aligned} & A_j f_{i,j+1} + B_j f_{i,j} + C_j f_{i,j-1} \\ &= -A_j f_{i+1,j+1} + D_j f_{i+1,j} - C_j f_{i+1,j-1} \end{aligned}$$

$$A_j = -\frac{\Delta t}{4\Delta S}(rS_j + \frac{\sigma^2 S_j^2}{\Delta S})$$

$$B_j = 1 + \frac{\sigma^2 S_j^2 \Delta t}{2(\Delta S)^2} + r\Delta t$$

$$C_j = -\frac{\Delta t}{4\Delta S}(-rS_j + \frac{\sigma^2 S_j^2}{\Delta S})$$

$$D_j = 1 - \sigma^2 S_j^2 \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2}$$

3.2 有限差分法における安定性の向上

ここまでの説明ではブラックショールズの偏微分方程式を直接差分方程式に置き換えたが, この方法は実務上二点において好ましくない. 一つ目は, $S(t)$ は幾何ブラウン運動に従う確率過程であるから, ΔS を等間隔にとるよりも, $\Delta \log S$ を等間隔にとった方がより原証券の変動過程を正確に反映できるということがある. もう一つは各係数が状態に依存する形になっているために, 収束や安定性を保証する条件が煩雑になるという点である.
$x = \log \frac{S}{K}$, $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$, $s = \frac{2r}{\sigma^2}$ とおき

$$g(\tau, x) = \frac{e^{(s-1)\frac{x}{2} + (s+1)^2 \frac{\tau}{4}}}{K} f(t, S) \tag{6}$$

上記の変数変換 (6) を (1) に代入すると

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \tag{7}$$

が得られる.
初期条件
$g(0, x) = h(x) \quad x \in [x_{min}, x_{max}]$
境界条件
$\lim_{x \to -\infty} g(t, x) = v(t)$,
$\lim_{x \to \infty} g(t, x) = u(t), t \in [0, \tau]$ とおくことにする.
$[0, \tau]$ を M 等分, $[x_{min}, x_{max}]$ を N 等分し
$\tau_i = i\Delta\tau, \quad i = 0, 1, \cdots, M$
$\Delta\tau = \frac{\tau}{M}$
$x_j = x_{min} + j\Delta x, \quad j = 0, 1, \cdots, N$
$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{N}$ とおく.
グリッドは $(M+1) \times (N+1)$ 個の空間である.

初期条件が $\tau = 0$ で与えられているので, 前方と後方が逆に対応する.

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} \cong \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{\Delta\tau} \quad \text{(後方差分)} \tag{8}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} \cong \frac{g_{i,j} - g_{i-1,j}}{\Delta\tau} \quad \text{(前方差分)} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \cong \frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} \quad \text{(中心差分)} \tag{10}$$

3.2.1 陽的有限差分法

各グリッドにおける偏微分係数の差分近似として $\frac{\partial g}{\partial x}$ と $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ については中心差分, $\frac{\partial g}{\partial \tau}$ については前方差分を使う. (9),(10) を (7) に代入する.

$$g_{i+1,j} = g_{i,j} + R(g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1})$$

$R = \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}, i = 0, 1, \cdots, M-1, j = 1, 2, \cdots, N-1$

3.2.2 陰的有限差分法

各グリッドにおける偏微分係数の差分近似として $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ については中心差分, $\frac{\partial g}{\partial \tau}$ については後方差分を使う. (8),(10) を (7) に代入する.

$$g_{i-1,j} = g_{i,j} - R(g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1})$$

$R = \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}, i = 1, 2, \cdots, M, j = 1, 2, \cdots, N-1$

3.2.3 クランク ニコルソン法

陽的差分方程式と陰的差分方程式の平均をとることによって得られる.

$$\begin{aligned} & g_{i+1,j} - \frac{R}{2}(g_{i+1,j+1} - 2g_{i+1,j} + g_{i+1,j-1}) \\ &= g_{i,j} + \frac{R}{2}(g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}) \end{aligned}$$

$R = \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}, i = 0, 1, \cdots, M-1, j = 1, 2, \cdots, N-1$

3.2.4 陽解法における安定条件

陽解法で数値計算を行う際には, 安定条件をみたさなければならない.
その安定条件は

$$\left|\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

であることが知られている.

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S} \qquad \Delta\tau = -\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$

このとき左辺の値が最大になるのは
$S = S_{max} = N\Delta S$ のときであるから, これを代入すると安定条件は次のように表される.

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sigma^2 N^2}$$

陽解法を用いて派生証券の評価を行うには, この安定条件が成立しているかを常にチェックしなければならない.

4 ヨーロピアンオプション

ヨーロピアンオプション [1][2][4] とは, 所定の期間の最終時点である満期, もしくは失効時点でのみ権利行使可能なオプションである. ヨーロピアンオプションにおいては,3 章で説明した有限差分法を使う. その場合の初期条件, 境界条件は, 以下の通りである.

4.1 変換前

ヨーロピアンコールでは
初期条件

$$F(S_j, t_M) = [S_j - K]_+$$

境界条件

$$F(S_0, t_i) = 0, F(S_N, t_i) = S_N - Ke^{-r(T-t_i)}$$

$i = 0, 1, 2, \cdots, M \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, N$
ヨーロピアンプットでは
初期条件

$$F(S_j, t_M) = [K - S_j]_+$$

境界条件

$$F(S_N, t_i) = 0, F(S_N, t_i) = Ke^{-r(T-t_i)} - S_N$$

$i = 0, 1, 2, \cdots, M \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, N$

4.2 変換後

ヨーロピアンコールでは
初期条件

$$g(0, x) = [e^{(s+1)\frac{x}{2}} - e^{(s-1)\frac{x}{2}}]_+$$

境界条件

$$\lim_{x\to-\infty} g(\tau, x) = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} g(\tau, x) = e^{(s+1)\frac{x}{2}+(s+1)^2\frac{\tau}{4}}$$

ヨーロピアンプットでは
初期条件

$$g(0, x) = [e^{(s-1)\frac{x}{2}} - e^{(s+1)\frac{x}{2}}]_+$$

境界条件

$$\lim_{x\to-\infty} g(\tau, x) = e^{(s-1)\frac{x}{2}+(s-1)^2\frac{\tau}{4}}$$
$$\lim_{x\to\infty} g(\tau, x) = 0$$

5 アメリカンオプション

アメリカンオプション [1][4][5] とは, ヨーロピアンオプションは途中行使できないのに対して, 満期までの任意の時点で早期行使ができるオプションである. アメリカンオプションも行使されなければヨーロピアンオプションと同じなので, 続行領域における偏微分方程式は以下のようになる.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0, S > b(t) \quad (11)$$

$b(t)$ は早期行使境界で,$S(t) > b(t)$ のとき早期行使は起こらない. 未知の早期行使境界 $b(t)$ は偏微分方程式の解 $f(t, S)$ を含んだ境界条件を満たすように定めなければならない. 時点 t で早期行使したときに得られるペイオフ関数を $h(t, x)$ とする. 今,i 以前の離散近似解 $f_{i,j}$ 求められているとする.
したがって $(i-1)$ における解は

$$f_{i-1,j} = \max(A_j f_{i,j+1} + B_j f_{i,j} + C_j f_{i,j-1}, h(t_{i-1}, S_j))$$

により計算される.
A_j,B_j,C_j は 3 章で用いた陽解法と等しい. 陰解法, クランク・ニコルソン法も同様に解く.

5.1 変換前

アメリカンプットでは
初期条件

$$F(S_j, t_M) = [K - S_j]_+$$

境界条件

$$F(S_N, t_i) = 0, F(S_0, t_i) = K$$

ペイオフ関数

$$h(t, S) = K - S_j$$

5.2　変換後

アメリカンプットでは

初期条件

$$g(0,x)=[e^{(s-1)\frac{x}{2}}-e^{(s+1)\frac{x}{2}}]_+$$

境界条件

$$\lim_{x\to-\infty} g(\tau,x)=e^{(s-1)\frac{x}{2}+(s-1)^2\frac{\tau}{4}}$$
$$\lim_{x\to\infty} g(\tau,x)=0$$

ペイオフ関数

$$g(x,\tau)=e^{\frac{1}{4}(s-1)^2\tau}(e^{\frac{1}{2}(s-1)x}-e^{\frac{1}{2}(s+1)x})$$

6　オプション価格の変動

時間分割を 1〜100 で変動させた時のオプション価格. 安定性, 効率性, 正確性の総合的な判断から最適とされたクランク・ニコルソン法 (LU 分解) を以下に示した.

変数変換前:実線

$Smax=300$	$\sigma=0.3$	$K=150$
$Smin=0$	$T=1$	$r=0.1$
$N=100$		

変数変換後:破線

$x_{max}=\log 5$	$\sigma=0.3$	$K=150$
$x_{min}=-\log 5$	$T=1$	$r=0.1$
$N=100$		

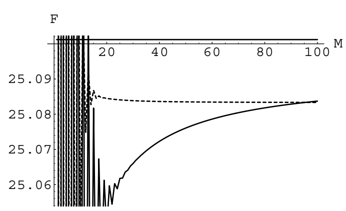

図 1　ヨーロピアンコール

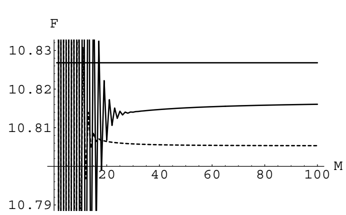

図 2　ヨーロピアンプット

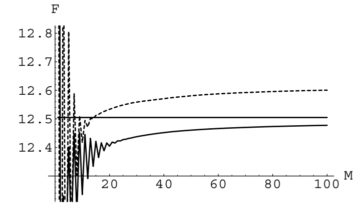

図 3　アメリカンプット

7　おわりに

本研究では有限差分法について研究を進めてきた. ヨーロピアンオプション, アメリカンオプションにおいてオプション価格を求めるプログラムを作成し, 考察を行った. それぞれにおいて特徴があり, 状況において選択する必要があることが分かったが, 総合的に見て, クランク・ニコルソン法 (LU 分解) が最も良いと判断することができた.

また, 有限差分法における文献が少ないのが現状であり, 本研究における考察が今後この分野を研究する人の参考になれば幸いである.

8　謝辞

本論文の作成にあたり, 指導教員として御指導頂きました國田寛教授をはじめ, 有益な助言を頂きました方々に心から感謝致します.

参考文献

[1] 木島正明 長山いづみ 近江義行:
ファイナンス工学入門 第三部 数値計算法,
日科技連 (1996).

[2] 森平爽一郎 小島裕:
コンピュテーショナルファイナンス,
朝倉書店 (1997).

[3] 高見穎郎 河村哲也:
偏微分方程式の差分解法,
東京大学出版社 (1994).

[4] Paul Wilmott Sam Howison Jeff Dewynne 著:
伊藤幹夫 戸瀬信之 訳:
デリバティブの数学入門,
共立出版 (2002).

[5] 宮沢裕之:
数値解法によるアメリカンオプションの価格評価,
東京大学工学部計数工学科 卒業論文 (1999).