オプション価格における数値解析
− Brennan-Schwartz アルゴリズム −

2000MM022 石原 正也

指導教員　國田 寛

1　はじめに

Black-Scholes の枠組において, ヨーロピアン・オプションの閉じた形の価格式が導出することができるが, アメリカン・オプションの評価, とりわけ Black-Scholes モデルにおけるアメリカン・プットオプション [1] の評価にあたっては, その解析解が知られていないため, 数値解法に頼らざるをえない. そのためには偏微分方程式の差分近似法 [2], ラティス展開, あるいはモンテカルロ法をアメリカン・オプション評価のために特に工夫することなどが試みられている [2].

アメリカン・オプションを数値解法で求める方法として早期行使境界を求める方法が知られているが, この研究では偏微分不等式を差分解法によって求める.

2　Black-Scholes モデルにおけるアメリカン・プットオプション

$(W_t)_{t\geq 0}$ は標準 Brown 運動であり, 株価 S_t はリスク中立確率測度 P^* の下で

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

を満たすと仮定する. 変数変換

$$X_t = \log(S_t) = \log(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$$

を行うことにより, アメリカン・プットオプションの価格計算に対応する偏微分不等式は

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \tilde{A}^{bs-log}v(t,x) \leq 0 \quad a.e.\ in[0,T]\times R \\ v(t,x) \geq \phi(x) \quad a.e.\ in[0,T]\times R \\ (v(t,x)-\phi(x))(\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \tilde{A}^{bs-log}v(t,x)) = 0 \\ \quad a.e.\ in[0,T]\times R \\ v(T,x) = \phi(x) \end{cases}$$

となり,$\phi(x) = (K - e^x)_+$ である. ただし,

$$\tilde{A}^{bs-log} = A^{bs-log} - r = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial}{\partial x} - r$$

すなわち,Black-Scholes モデルのアメリカン・プットオプションの価格は $u(t, X_t)$ で与えられる.

2.1　不等式の数値的解法

まず, 問題を局所化し区間 $\mathrm{O}_l = (-l, l)$ の不等式に帰着させる. このとき $\pm l$ における境界条件を課す必要がでてくる. ここでは $\pm l$ における x についての微分が 0 になるように,Neumann 境界条件

$$(A)\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \tilde{A}^{bs-log}v(t,x) \leq 0 \quad a.e.\ in[0,T]\times \mathrm{O}_l \\ v(t,x) \geq \phi(x) \quad a.e.\ in[0,T]\times \mathrm{O}_l \\ (v-\phi)(\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \tilde{A}^{bs-log}v(t,x)) = 0 \\ \quad a.e.\ in[0,T]\times \mathrm{O}_l \\ v(T,x) = \phi(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t,\pm l) = 0 \end{cases}$$

を与える. ここで不等式 (A) を有限差分法を用いて離散化する.$[0,T]$ を M 分割し,$(-l,l)$ を $N+1$ 分割する.f_h は $f_h^i = \phi(x_i), x_i = -l + 2il/(N+1)$ で与えられるベクトル,$\tilde{A}_h$ は

$$\tilde{A}_h = \begin{pmatrix} \beta+\alpha & \gamma & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta+\gamma \end{pmatrix}$$

ただし,

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sigma^2}{2h^2} - \frac{1}{2h}(r - \frac{\sigma^2}{2}) \\ \beta = -\frac{\sigma^2}{h^2} - r \\ \gamma = \frac{\sigma^2}{2h^2} + \frac{1}{2h}(r - \frac{\sigma^2}{2}) \end{cases}$$

で表される.u と v が R^n- 値の 2 つのベクトルの時,$\forall 1 \leq i \leq n, u_i \leq v_i$ のとき $u \leq v$ と書くことにする. 空間と時間の離散化により,
有限次元の不等式 $(A_{h,k})$

$$(A_{h,k})\begin{cases} u_{h,k}^M = f_h \\ \text{かつ } 0 \leq n \leq M-1 \text{ のとき} \\ u_{h,k}^{n+1} - u_{h,k}^n + k(\theta\tilde{A}_h u_{h,k}^n + (1-\theta)\tilde{A}_h u_{h,k}^{n+1}) \leq 0 \\ u_{h,k}^n \geq f_h \\ (u_{h,k}^{n+1} - u_{h,k}^n + k(\theta\tilde{A}_h u_{h,k}^n + (1-\theta)\tilde{A}_h u_{h,k}^{n+1}) \\ \quad , u_{h,k}^n - f_h) = 0 \end{cases}$$

に帰着される. ただし,(x,y) は R^N における内積であり,$\theta \in [0,1]$ とする.

$$\begin{cases} T = I - k\theta\tilde{A}_h \\ X = u_{h,k}^n \\ G = (I + k(1-\theta)\tilde{A}_h)u_{h,k}^{n+1} \\ F = f_h \end{cases}$$

とおくと, 各時点 n において

$$(AD)\begin{cases} X \geq F \\ TX \geq G \\ (TX - G, X - F) = 0 \end{cases}$$

のような不等式系を解く必要がある.$X = (x_i)_{1\le i\le N}$, $G = (g_i)_{1\le i\le N}$ である.T は

$$T = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_N & b_N + c_N \end{pmatrix}$$

ただし,

$$\begin{cases} a = a_i = \theta k(-\frac{\sigma^2}{2h^2} + \frac{1}{2h}(r - \frac{\sigma^2}{2})) \\ b = b_i = 1 + \theta k(\frac{\sigma^2}{h^2} + r) \\ c = c_i = -\theta k(\frac{\sigma^2}{2h^2} + \frac{1}{2h}(r - \frac{\sigma^2}{2})) \end{cases}$$

のような 3 重対角行列とする.(AD) は有限次元の不等式である. このタイプの不等式は, 行列 T が「強圧的」(すなわち, $(X, TX) \ge (\alpha X, X)(\alpha > 0)$) のとき, 理論的にも数値的にも解法は知られている. $|r - \frac{\sigma^2}{2}| \le \frac{\sigma^2}{h}$ かつ $\frac{k}{2h}|r - \frac{\sigma^2}{2}| < 1$ であれば仮定が満足される. この「強圧性」の仮定の下では, 問題 $(A_{h,k})$ には, ただ 1 つの解が存在することが証明できる.

2.2 有限次元不等式の解法アルゴリズム

アメリカン･プットオプションの場合, 時間の刻みステップ h が十分に小さければ,3 重対角行列の方程式系を解くアルゴリズムを若干修正することにより, 系 (AD) を能率的に解くことができる.(ベクトル $(a_1+b_1, b_2, ..., b_N + c_N)$ を b_i と表す).

$Upward:$
$b'_N = b_N$
$g'_N = g_N$
i を $N-1$ から 1 まで減少させる.
  $b'_i = b_i - c_i a_{i+1}/b'_{i+1}$
  $g'_i = g_i - c_i g'_{i+1}/b'_{i+1}$

$'American' downward:$
$\tilde{x}_1 = g'_1/b'_1$
i を 2 から N まで増加させる.
  $\tilde{x}_i = (g'_i - a x_{i-1})/b'_i$
  $x_i = \sup(\tilde{x}_i, f_i)$

$(A_{h,k})$ で $\theta = 1$ とし,Neumann 境界条件を課し, 前の解法アルゴリズムを用いたものは,「Brennan-Schwartz アルゴリズム [3]」と名付けられた解法である.

前出のアルゴリズムは,「強圧的」の仮定を満たすときに限り不等式系 (AD) の正確な解が計算できる.「強圧的」でない場合は, このアルゴリズムにより計算された結果と系 (AD) の解が異なる場合がある.

3 解析結果

以下,Brennan-Schwartz 法を B-S 法と表す. 厳密解に代わるものとして 2 項モデルを使用した. B-S 法は分割数 $N = M = 1250$,2 項モデルは分割数 400 を用いた.

3.1 Brennan-Schwartz 法

$S = 100, K = 100, T = 1, \sigma = 0.3, r = 0.06$ を使用して, アメリカン・プットオプションに一番最適な θ を求めた. 2 項モデルの解は 9.527820 である.

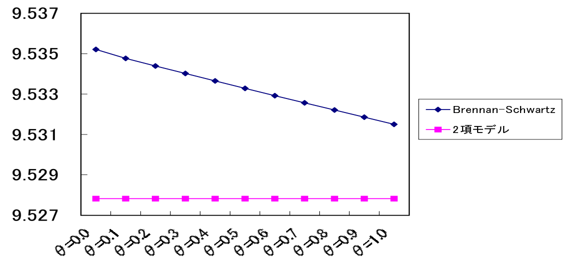

図 1 アメリカン・プットオプション

$\theta = 1$ のとき, すなわち陰解法が一番性能が良かった.

3.2 強圧性

強圧性を満たさないアメリカン・プットオプション価格を求めた.$S = 100, K = 100, T = 1$ を使用した.

r	σ	2 項モデル	B-S 法	誤差	誤差 (%)
0.01	0.01	0.165287	0.010087	0.155200	93.897282
0.02	0.02	0.330118	0.293319	0.036799	11.147226
0.03	0.03	0.494493	0.465299	0.029194	5.903825
0.04	0.04	0.658412	0.642088	0.016324	2.479299
0.05	0.05	0.821872	0.810442	0.011430	1.390728

表 1 強圧性を満たさないケース

強圧性を満たすケースに比べて, 誤差が大きくなった.

4 おわりに

有限差分法を Brennan-Schwartz アルゴリズムで解くことによって陽解法, 陰解法, クランクニコルソン法を一つのプログラムで解くことができるという利点がある. しかも,θ の値を変化させれば陽解法, 陰解法, クランクニコルソン法以外の解法も実行できるという利点もある.

5 謝辞

本研究を進めるにあたり, 熱心に御指導くださり, また多大な助言をいただいた南山大学数理科学科の國田寛教授と, ご協力いただいた皆様に深く感謝致します.

参考文献

[1] D. ラムベルトン,B. ラペール：ファイナンスへの確率解析, 朝倉書店 (2000).

[2] 森平爽一朗, 小島裕：コンピュテーショナルファイナンス, 朝倉書店 (1997).

[3] P.Jaillet,D.Lamberton,B.Lapeyre: Variational inequalities and pricing of American options, Acta Appicandae Mathematicae,21(1990),pp.263-289.