

# ボラティリティ変動モデルによる日経225 オプションの分析

2000MM035 加藤 禎大  
2000MM010 服部 隆宏  
指導教員 伏見 正則

## 1 はじめに

オプション価格の導出に用いられる Black/Scholes (1973) モデルでは、ボラティリティと呼ばれる原資産価格変化率の2次のモーメントは満期まで一定であると仮定される。近年ボラティリティは日々確率的に変動するという考えが主流になってきており、そうしたボラティリティの変動を明示的に定式化するものをボラティリティ変動モデルという。ボラティリティ変動モデルの代表的なものに、Engle (1982) によって提案された ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルを一般化した Bollerslev (1986) の GARCH モデルがある。本論文は、そうした GARCH モデルおよびそれを発展させたモデル (本論文では、そうしたモデルを総称して、GARCH 型モデルと呼ぶ) を使って日経225 オプション価格を計算し、どのモデルが実際のオプション価格の変動を捉えるのにパフォーマンスが良いか比較を行う。

## 2 GARCH オプション価格付けモデル

### 2.1 ボラティリティ変動の定式化

本論文では、ボラティリティ変動の定式化として、GARCH, EGARCH, EGARCH 休日モデルを用いる。そこで、まず最初にこれらのモデルについて説明を行う。

まず、収益率 (または、価格変化率)  $R_t$  を  $t-1$  期において予測可能な変動  $\mu_t$  と予測不可能な変動  $\epsilon_t$  の和

$$R_t = \mu_t + \epsilon_t \quad (1)$$

として表す。以下では、 $\mu_t$  を期待収益率、 $\epsilon_t$  を予測誤差と呼ぶ。ボラティリティ変動モデルでは、さらに予測誤差  $\epsilon_t$  を、常に非負の値をとる  $\sigma_t$  と期待値0、分散1の過去と独立で同一な分布に従う確率変数  $z_t$  との積

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d., \\ E(z_t) &= 0, \quad \text{Var}(z_t) = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

として表す。この  $\sigma_t$  を  $R_t$  のボラティリティと呼ぶ。

ボラティリティ  $\sigma_t$  の変動の定式化として最もよく用いられているのは、Engle (1982) によって提案された ARCH モデルを一般化した Bollerslev (1986) の GARCH モデルである。ボラティリティの変動を定式化する上で必ず考慮に入れなければならないことは、ボラティリティのショックには持続性があり、ボラティリティが上昇 (低下) した後はボラティリティが高い (低い) 期間がしばらく続くことである。こうしたボラティ

リティに対するショックの持続性を考慮し、GARCH モデルを用いる。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \epsilon_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \quad \beta, \alpha \geq 0. \quad (3)$$

ここで、パラメータに非負制約を課すのは  $\sigma_t^2$  の非負性を保証するためである。

GARCH モデルを改良するに当たって注目されたのが、株式市場で観測されるボラティリティ変動の非対称性である。株式収益率のボラティリティは、株価が上がった日の翌日よりも株価が下がった日の翌日の方が上昇する傾向があることが経験的に知られており、それを考慮した Nelson (1991) の提案した EGARCH モデルを用いる。

GARCH モデルでは、左辺を  $\sigma_t^2$  にしていた。これに対して、Nelson (1991) の提案した EGARCH モデルでは、左辺を  $\ln(\sigma_t^2)$  にする。こうすることにより、パラメータに非負制約が必要なくなるだけでなく、負の値をとり得るような変数でも右辺に説明変数として加えることが可能になる。EGARCH モデルでは過去の収益率の予測誤差  $\epsilon_{t-1}$  をボラティリティ  $\sigma_{t-1}$  で割って基準化した  $z_{t-1} (= \epsilon_{t-1}/\sigma_{t-1})$  を右辺に加えることにより、ボラティリティ変動の非対称性を捉えようとしている。本論文の分析では、次のような EGARCH モデルを用いる。

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma z_{t-1} \\ &\quad + \alpha (|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)). \end{aligned} \quad (4)$$

この式は、 $z_{t-1} > 0$  であれば、

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + (\alpha + \gamma) |z_{t-1}| \\ &\quad - \alpha E(|z_{t-1}|). \end{aligned}$$

となるのに対して、 $z_{t-1} < 0$  であれば、

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + (\alpha - \gamma) |z_{t-1}| \\ &\quad - \alpha E(|z_{t-1}|). \end{aligned}$$

となる。そこで、EGARCH モデルでは、 $\gamma < 0$  であれば、予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

以上の GARCH, EGARCH モデルにおいて、ボラティリティに対するショックの持続性を測る指標はそれぞれ  $\alpha + \beta$ ,  $\beta$  であり、これらの値が1に近いほどショックの持続性が高いことになる。これは、(3), (4) 式の両辺の  $t-1$  期の情報集合  $I_{t-1}$  を条件とする期待値をとると、

それぞれ,

$$E(\sigma_t^2 | I_{t-1}) = \omega + (\alpha + \beta)\sigma_{t-1}^2, \quad (5)$$

$$E(\ln(\sigma_t^2) | I_{t-1}) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2), \quad (6)$$

となることから確認できる。

ボラティリティが日々変動する原因として考えられるのは、市場に入ってくる情報量の日々の変動である。市場に多くの情報が入ってきた日は株価が大きく変動するのでボラティリティは高く、逆に、あまり情報が入ってこなかった日は株価があまり動かずボラティリティは低いと考えられる。株価を動かすような情報は休日で株式市場が閉まっている日でも入ってくるので、情報が蓄積し、ボラティリティが高まると考えられる。それを考慮した Nelson(1991) の提案した EGARCH 休日 モデルを用いる。

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) = & \omega + \ln(1 + \delta N_t) + \beta[\ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega \\ & - \ln(1 + \delta N_{t-1})] + \gamma z_{t-1} \\ & + \alpha(|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)). \end{aligned} \quad (7)$$

ここでは [5] を引用した。

## 2.2 期待収益率の定式化と誤差項の分布

オプション価格の導出では、ボラティリティの定式化だけでなく、(1) 式の期待収益率  $\mu_t$  をどのように定式化するかが重要になる。本論文では、投資家の危険中立性を仮定した定式化と仮定しない定式化を両方行う。本論文では、原資産の  $t-1$  期から  $t$  期の収益率 (価格変化率) を  $R_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$  で定義する。ただし、 $S_t$ ,  $S_{t-1}$  は  $t$  期と  $t-1$  期の原資産価格を表す。収益率をこのように定義すると、投資家の危険中立性を仮定した場合には、期待収益率  $\mu_t$  は安全資産の金利  $r$  と等しくなければならないので、(1) 式は、

$$R_t = r + \epsilon_t. \quad (8)$$

となる。

危険中立性を仮定しない場合の収益率を次のように定式化する。

$$R_t = r + a + bR_{t-1} + c\sigma_t^2 + \epsilon_t. \quad (9)$$

$a = b = c = 0$  であれば、この式は (8) 式になり、投資家は危険中立的であることになる。

これまで、誤差項  $z_t$  は平均 0、分散 1 の過去と独立で同一な分布に従うというだけで、具体的な分布については仮定してこなかった。資産収益率の分布は正規分布よりも裾が厚いことが古くから知られている。そこで、本論文では、 $z_t$  の分布として、標準正規分布だけでなく、分散を 1 に基準化した  $t$  分布も用いる。ただし、その場合には、 $t$  分布の自由度  $\nu$  も未知パラメータとして推定する。また、EGARCH モデル (4) 式の右辺にある  $E(|z_t - 1|)$  は、 $z_t$  が標準正規分布に従う場合には  $\sqrt{2/\pi}$ 、基準化した  $t$  分布に従う場合には  $\sqrt{(\nu-2)/\pi} \Gamma((\nu-1)/2) / \Gamma(\nu/2)$  である。ただし、 $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数を表す。

以下、ボラティリティの定式化を GARCH モデル、誤差項  $z_t$  の分布を標準正規分布、収益率の定式化を投資家の危険中立性を仮定した (8) 式にしたモデルを GARCH-n モデル、収益率の定式化だけ危険中立性を仮定しない (9) 式に変えたモデルを GARCH-m、誤差項  $z_t$  の分布だけ基準化した  $t$  分布に変えたモデルを GARCH-t モデルと呼ぶことにする。ボラティリティを EGARCH モデルで定式化した場合には、それぞれ、EGARCH-n, EGARCH-m, EGARCH-t モデル、EGARCH 休日 モデルで定式化した場合には、EGARCH 休日-n, EGARCH 休日-m, EGARCH 休日-t モデルと呼ぶことにする。本論文で用いる GARCH 型モデルは、以上 9 つのモデルである。GARCH 型モデルのパラメータは最尤法により簡単に推定することができるので、本論文でもこれら 9 つのモデルのすべてのパラメータを最尤法によって推定する。

ここでは [5] を引用した。

## 2.3 オプション価格の導出方法

投資家が危険中立的な場合、ヨーロッパ型オプションの価格は満期におけるオプション価格の期待値を安全資産の金利  $r$  で割り引いた割引現在価値となる。すなわち、 $T$  期が満期で権利行使価格  $K$  のコール・オプション、プット・オプションの  $t$  期の価格  $C_t, P_t$  は次のように表される。

$$C_t = (1+r)^{-(T-t)} E[\text{Max}(S_T - K, 0)], \quad (10)$$

$$P_t = (1+r)^{-(T-t)} E[\text{Max}(K - S_T, 0)]. \quad (11)$$

ここで、 $S_T$  はオプションの満期  $T$  期の原資産価格である。GARCH 型モデルの場合、右辺の期待値は解析的に求められないので、シミュレーションによって評価する。 $S_T$  のシミュレーションを行い、 $(S_T^{(1)}, \dots, S_T^{(i)})$  が得られたとする。 $n$  が十分大きければ、期待値は以下の式によって評価できる。

$$\begin{aligned} E[\text{Max}(S_T - K, 0)] \\ \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(S_T^{(i)} - K, 0), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E[\text{Max}(K - S_T, 0)] \\ \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(K - S_T^{(i)}, 0). \end{aligned} \quad (13)$$

そこで、例えば、GARCH-n モデルの場合、以下のアルゴリズムによりオプション価格  $C_t, P_t$  を導出できる。

- [1] 標本  $\{R_1, \dots, R_t\}$  を使って、GARCH-n モデルの未知パラメータを最尤推定する。
- [2] 互いに独立な標準正規分布から  $\{z_{t+1}^{(i)}, \dots, z_T^{(i)}\}_{i=1}^n$  をサンプリングする。
- [3][2] でサンプリングされた値を GARCH-n モデルに代入して、 $\{R_t^{(i)}, \dots, R_T^{(i)}\}_{i=1}^n$  を計算する。ただし、未知パラメータの値は [1] で推定された値とする。

[4] 次の式を使ってオプションの満期  $T$  期における原資産価格  $(S_{t+1}^{(1)}, \dots, S_T^{(n)})$  を計算する.

$$S_T^{(i)} = \prod_{s=1}^{T-t} (1 + R_{t+s}^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n.$$

[5] 次の式からオプション価格  $C_t, P_t$  を計算する.

$$C_t \approx (1+r)^{-(T-t)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(S_T^{(i)} - K, 0),$$

$$P_t \approx (1+r)^{-(T-t)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(K - S_T^{(i)}, 0).$$

EGARCH-n, EGARCH 休日-n モデルでも同様にオプション価格を導出できる.

GARCH- $t$  モデルの場合には, 上のアルゴリズムの [1]-[3] を次のように書き換えるだけでよい.

- [1'] 標本  $\{R_1, \dots, R_t\}$  を使って, GARCH- $t$  モデルの未知パラメータを最尤推定する.
- [2'] 互いに独立な分散 1 に基準化された自由度  $\nu$  の  $t$  分布から  $\{z_{t+1}^{(i)}, \dots, z_T^{(i)}\}_{i=1}^n$  をサンプリングする. ただし,  $\nu$  は [1'] で推定された値とする.
- [3][2'] でサンプリングされた値を GARCH- $t$  モデルに代入して,  $\{R_{t+1}^{(i)}, \dots, R_T^{(i)}\}_{i=1}^n$  を計算する. ただし, 未知パラメータの値は [1'] で推定された値とする.

EGARCH- $t$ , EGARCH 休日- $t$  モデルも同様である.

危険中立性を仮定しない場合には, (8), (9) 式の右辺の期待値は危険中立確率測度の下で求めなければならない. そこで, オプションの満期における原資産価格のシミュレーションは, 推定されたモデルではなく, それを危険中立確率測度の下で変換したモデルを使って行わなければならない. Duan (1995) は, 局所危険中立評価関係 (Locally Risk-Neutral Valuation Relationship) という仮定を置くことにより, GARCH 型モデルを危険中立確率測度の下でのモデルに変換する方法を示している. 局所危険中立評価関係とは, 危険中立確率測度  $Q$  と真の確率測度  $P$  が以下の 3 つの条件を満たすことをいう.

1.  $R_t|I_{t-1}$  が確率測度  $Q$  の下で正規分布に従っている.
2.  $E^Q(R_t|I_{t-1}) = r$ .
3.  $\text{Var}^Q(R_t|I_{t-1}) = \text{Var}^P(R_t|I_{t-1}) a.s.$

ここで,  $I_{t-1}$  は  $t-1$  期に利用可能な情報集合,  $E^Q(\cdot)$  は確率測度  $Q$  の下での期待値,  $\text{Var}^Q(\cdot), \text{Var}^P(\cdot)$  はそれぞれ確率測度  $Q, P$  の下での分散を表す. Duan (1995) は, こうした局所危険中立評価関係を仮定すると, 危険中立確率測度  $Q$  の下で GARCH-m モデルが次のようなモデルに変換されることを示している.

$$R_t = r + \sigma_t \xi_t \quad \xi_t|I_{t-1} \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (14)$$

$$\lambda_t = \frac{\mu_t - r}{\sigma_t} \quad (15)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha (\xi_{t-1} - \lambda_{t-1})^2 \sigma_{t-1}^2, \quad (16)$$

ただし, (15) 式の右辺の  $\mu_t$  は期待収益率であり, 本論文の GARCH-m モデルでは,  $\mu_t = r + a + bR_{t-1} + c\sigma_t^2$  と定式化している.

そこで, パラメータの推定は GARCH-m モデルを使って行い, 満期におけるオプション価格の期待値を計算するためのシミュレーションは (14)-(16) 式から成る危険中立確率測度  $Q$  の下でのモデルを使って行えばよい. したがって, この場合, 上の危険中立性を仮定した場合のアルゴリズムの [1]-[3] を次のように書き換えればよい.

- [1''] 標本  $\{R_1, \dots, R_t\}$  を使って, GARCH-m モデルの未知パラメータを最尤推定する.
- [2''] 互いに独立な標準正規分布から  $\{\xi_{t+1}^{(i)}, \dots, \xi_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$  をサンプリングする.
- [3''] [2''] でサンプリングされた値を危険中立確率測度  $Q$  の下でのモデル (14)-(16) 式に代入して,  $\{R_{t+1}^{(i)}, \dots, R_T^{(i)}\}_{i=1}^n$  を計算する. ただし, 未知パラメータの値は [1''] で推定された値とする.

EGARCH-m, EGARCH 休日-m モデルも同様である. ただし, EGARCH-m, EGARCH 休日-m モデルを危険中立確率測度  $Q$  の下で変換すると, (14), (15) 式そのまま, (16) 式をそれぞれ次のように置き換えたモデルになる.

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma (\xi_{t-1} - \lambda_{t-1}) + \alpha (|\xi_{t-1} - \lambda_{t-1}| - \sqrt{2/\pi}), \quad (17)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \ln(1 + \delta N_t) + \beta [\ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega - \ln(1 + \delta N_{t-1})] + \gamma (\xi_{t-1} - \lambda_{t-1}) + \alpha (|\xi_{t-1} - \lambda_{t-1}| - \sqrt{2/\pi}). \quad (18)$$

本論文では, 上のアルゴリズムに従ってオプション価格を計算する際に, 準モンテカル口法を用いる. 準乱数としては, Halton 列, Faure 列の 2 つの多次元の low-discrepancy 列を用いる. この 2 つで発生された準乱数を逆関数法を使って正規分布,  $t$  分布で利用する.

ここでは [5] を引用した.

## 2.4 Black-Scholes 公式の導出

本論文では, 上で述べた GARCH, EGARCH, EGARCH 休日モデルを比較するために, Black-Scholes の公式でオプション価格を導出する.

- $C, P$ : コール (プット) オプション価値. この値は, 原資産価値  $S$  と時点  $t$  の関数とみなし,  $C = C(S, t), P = P(S, t)$  と書く.
- $\sigma$ : 原資産のボラティリティ
- $E$ : 行使価格
- $T$ : 満期時点
- $r$ : 利子率

とすると、コール、プットオプション価値はそれぞれ、

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$
$$P(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

となる。ここで、 $N(d_1)$  は標準正規分布の累積分布関数であり、 $d_1, d_2$  は

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},$$
$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

で定義される。

ボラティリティには、過去 20 日間の日経 225 日次変化率を用いて計算したヒストリカル・ボラティリティを用いている。

ここでは [6] を引用した。

### 2.5 オプション価格の推定値の比較

次に、各 GARCH 型モデルからオプション価格を導出し、どのモデルがパフォーマンスが良いか比較を行う。その際、安全資産の金利  $r$  にはコールレート（無担保）を用いている。パフォーマンスの比較には、平均誤差率 (Mean Error Rate; MER) と平均 2 乗誤差率 (Root Mean Square Error Rate; RMSER) を用いている。それらは、 $C_i, \hat{C}_i$  をオプションの実際の市場価格とその推定値とすると、それぞれ次のように定義される。

$$MER = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\hat{C}_i - C_i}{C_i},$$
$$RMSER = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\hat{C}_i - C_i}{C_i} \right)^2}.$$

ここで、 $m$  は分析に用いたオプションの標本の大きさである。MER によってバイアスの有無を、RMSER によって実際のオプション価格との乖離度を比較する。

ここでは [5] を引用した。

## 3 結論

本論文では日経 225 株価指数を用いて最尤法によって求めた GARCH 型モデルのパラメータについての分析と、日経 225 オプション価格を用いて GARCH 型モデルによって求めたオプション価格のパフォーマンスについての分析を行った。

まずパラメータについて分析した結果、

- [1] ボラティリティのショックの持続性を表すパラメータがどのモデルでも 1 に近い値のため、日経 225 変化率のボラティリティにもショックの持続性はある。
- [2] ボラティリティの非対称性を表すパラメータ  $\gamma$  は EGARCH でも EGARCH 休日モデルでも負の値をとったため、日経 225 変化率のボラティリティにも非対称性はある。

[3] 休日に入ってくる情報量を表すパラメータ  $\delta$  は 0 と 1 の間の値を得ているので、休み明けの日に休日にたまった情報量の方ボラティリティが高まる傾向がある。

次に、GARCH 型モデルによって求めたオプション価格のパフォーマンスについての分析した結果、

- [1] 期待収益率に危険中立を仮定しない方法を用いてオプション価格を求めてもパフォーマンスは改善されない。
- [2] 日経 225 変化率の誤差項の分布を  $t$  分布にしたほうがフィットは良くなるが、GARCH- $t$  以外のモデルではパフォーマンスは改善されない。
- [3] 日経 225 変化率のボラティリティの非対称性を考慮した EGARCH モデルは、考慮してない GARCH モデルよりもパフォーマンスは良い。
- [4] 日経 225 変化率のボラティリティに、休み明けの日に休日にたまった情報量の方ボラティリティが高まる傾向があるが、それを考慮した EGARCH 休日モデルは EGARCH よりパフォーマンスは劣る。
- [5] BS モデルと GARCH 型モデル全てを比較した結果、ボラティリティを変動させることによってパフォーマンスは改善されることがいえる。

## 参考文献

- [1] 福島雅夫 (1999), 『数理計画入門』, 朝倉書店。
- [2] 三井秀俊 (2000), 「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」, 『現代ファイナンス』, No.7, pp.57-73.
- [3] 湯前祥二・鈴木輝好 (2000), 『モンテカルロ法の金融工学への応用』, 朝倉書店。
- [4] 渡部敏明 (2000), 『ボラティリティ変動モデル』, 朝倉書店。
- [5] 渡部 敏明: 日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証, 2003/7, [http://www.imes.boj.or.jp/japanese/jdps/jdps2003\\_index.html](http://www.imes.boj.or.jp/japanese/jdps/jdps2003_index.html).
- [6] Wilmott, P., Howison, S. and Dewynne, J. 著, 伊藤幹夫, 戸瀬信之訳 (2002), 『デリバティブの数学入門』 共立出版株式会社。
- [7] Bollerslev, T. (1987), "A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rate of Return," Review of Economics and Statistics, 69, pp.542-547.
- [8] Duan, J.-C. (1995), "The GARCH Option Pricing Model," Mathematical Finance, Vol.5, No.1, pp.13-32.
- [9] Joy, C., Boyle, P., and Tan, K.-S. (1996), "Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance," Management Science, Vol.42, No.6, pp.926-938.