

最適取替発注政策に関する研究

2001MT002 青木 秀将

2001MT007 伴野 匠

2001MT059 國枝 良旭

指導教員 尾崎 俊治

1 はじめに

私たちは普段ものにあふれた生活を送っている。壊れたものは捨てられ新しいものにかえられる。しかし私たちが日常生活では目にしないようないくつものユニットで構成されている大型で高価なものを考えると、ある部分が故障したからといってすべてを安易に新しくすることはできない。そこで私たちはそのようなものの取替方法を考え、そして取替の最適なタイミングを考察していく。

現在、様々な取替問題が考えられている。本研究ではまず既存の取替問題について理解を深め、その知識から新たな取替問題について研究していく。

表記

本研究で使用する記号の説明を以下に記す。

c_1 : 事後取替費用

c_2 : 事前取替費用

$C(T)$: 単位時間当りの期待費用

$F(T)$: ユニットの故障時間分布

$\bar{F}(T) = 1 - F(T)$

2 取替問題

ここでは年齢取替、ブロック取替、小修理を伴うブロック取替といった3つの取替問題について議論する。

2.1 年齢取替

定期的な取替期間 T を決め、その期間 T が経過する、もしくは故障が起こった場合取替するというモデルである。ただし、期間 T を経過する前に故障した場合、故障したときの履歴をとり、そこから期間 T を計ることが必要である。これにより、取替たばかりのほぼ新品の商品を取替してしまうことを防ぐことができるが、取替の記録を取っておくことが必要であり維持、管理が複雑になり費用も増加する。

この場合、 $C(T)$ は以下のように求めることができる。単位時間当りの期待費用は、

$$\frac{\text{期待費用}}{\text{期待時間}} \quad (1)$$

である。この場合、一周期の期待費用は、

$$c_1 F(T) + c_2 \bar{F}(T) = c_1 - (c_1 - c_2) \bar{F}(T) \quad (2)$$

である。すると期待時間は、

$$\int_0^T t dF(t) + T \bar{F}(T) = \int_0^T \bar{F}(t) dt \quad (3)$$

となるので、求める $C(T)$ は、

$$C(T) = \frac{c_1 - (c_1 - c_2) \bar{F}(T)}{\int_0^T \bar{F}(t) dt} \quad (4)$$

となる。このとき、 $C(T)$ を最小にする T を考えるとある周期 T^* の時に最小の $C(T^*)$ を得る ([1] 参照)。 $c_1 > c_2$ で $F(t)$ は密度をもち、故障率を $\lambda(t)$ とする。式 (4) を微分して 0 とおくと、

$$\lambda(T) \int_0^T \bar{F}(t) dt - F(T) = \frac{c_2}{c_1 - c_2} \quad (5)$$

となる。さらに $\lambda(t)$ が連続な単調増加関数であり、

$$\lambda(\infty) > \frac{\lambda c_1}{c_1 - c_2} \quad (6)$$

ならば、

$$C(T^*) = (c_1 - c_2) \lambda(T^*) \quad (7)$$

となる ([2] 参照)。

2.2 ブロック取替

定期的な取替期間 $T, 2T, 3T, \dots$ を決め、たとえ期間の直前に故障し、新品に取替たとしても、期間が来れば取替る。これにより、年齢取替のように交換の記録を取っておく必要性がなく維持が簡単である。しかし、まだ取替たばかりの新品同様の状態でもを取替してしまう可能性があり年齢取替より費用が高くなってしまいう事もある。この場合の単位時間当りの期待費用は $M(T)$ を再生関数、 $m(T)$ を密度関数として、以下のように求める。

一周期当たりの期待費用は、

$$c_1 M(T) + c_2 \quad (8)$$

となる。期待時間は T であるので、(1) より求める $C(T)$ は、

$$C(T) = \frac{c_1 M(T) + c_2}{T} \quad (9)$$

となる。 $F(t)$ が密度をもつときは、

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} \quad (10)$$

とおき、(9) を T で微分し、0 とおくことで最適な T^* は、

$$C(T^*) = c_1 m(T^*) \quad (11)$$

ようになる ([2] 参照)。

2.3 小修理を伴うブロック取替

ブロック取替では、故障するたびに新品に取替たが小修理を伴うブロック取替では応急的に修理を施し、とにかく機能を回復させることを考える。ただし、あくまでも応急的であることに注意する。つまり時間 t のときに故障率 $\lambda(t)$ のユニットが故障した場合、修理した直後であっても故障率は $\lambda(t)$ のままであると仮定する。このように小修理とは故障率をかえない修理のことである。

一周期における小修理の期待回数は、時間 t の間に小修理を n 回行う確率を $P_n(t)$ とし、 $(t, t + \Delta t)$ の間で故障する確率が $\lambda(t)\Delta t$ となるので、

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)\{1 - \lambda(t)\Delta t\} + P_{n-1}(t)\lambda(t)\Delta t, n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ とすると

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda(t)P_n(t) + \lambda(t)P_{n-1}(t), n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

となる微分方程式を得る。これを初期条件のもとで解くと、

$$P_n(t) = \frac{e^{-\Lambda(t)}\{\Lambda(t)\}^n}{n!}, n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

となる。ただし、

$$\Lambda(T) = \int_0^T \lambda(x)dx \quad (15)$$

である。 $(0, T)$ 間の小修理期待回数は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = e^{-\Lambda(t)}\Lambda(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{\Lambda(t)\}^n}{n!} = \Lambda(t) \quad (16)$$

となる。 c_m を小修理 1 回にかかる費用とすると、一周期当りの期待費用は、

$$c_m\Lambda(T) + c_2 \quad (17)$$

となり、極限状態における $C(T)$ は、

$$C(T) = \frac{c_m\Lambda(T) + c_2}{T} \quad (18)$$

となる。次に式 (18) を微分して 0 とおくと、

$$T\lambda(T) - \int_0^T \lambda(t)dt = \frac{c_2}{c_m} \quad (19)$$

となる。 $\lambda(t)$ が連続で、単調増加関数ならば、

$$C(T^*) = c_m\lambda(T^*) \quad (20)$$

となる。

2.4 3 取替の考察

これまでに 3 つの代表的な取替方法について議論してきた。これまで議論してきた年齢、ブロックの 2 つの取替方法の長所、短所から年齢取替は取替対象が小数個の場合、または複数個で価格が高価な場合、ブロック取替は複数個で価格が安価な場合に適用することがよいと推測される。

3 発注問題

取替を行う場合、取替る商品が無限に存在するわけではない。そのためあらかじめ商品を発注しておき、効率よく取替ることができるための発注問題について考える (以下 [4] 参照)。

3.1 発注 1 (在庫する場合)

この発注方法では発注した商品が到着すると、いったん在庫する。そして、期間 T が経過するか故障した場合、在庫してあった商品と取替る ([3] 参照)。この発注方法を考える際、一周期当りの期待費用は以下の 3 点から得ることができる。ただし k_1 を単位時間当りの在庫不足にかかる費用、 k_2 を単位時間当りにかかる在庫の維持費用、 L を発注してから商品が届くまでの時間、 $\frac{1}{\lambda}$ を平均稼働時間とする。

不足費用 在庫品切の時にかかる費用

$$k_1 \left[\int_0^T LdF(t) + \int_T^{T+L} (T+L-t)dF(t) \right] = k_1 \int_T^{T+L} F(t)dt \quad (21)$$

在庫費用 在庫維持にかかる費用

$$k_2 \int_{T+L}^{\infty} (t-T-L)dF(t) = k_2 \int_{T+L}^{\infty} \bar{F}(t)dt \quad (22)$$

発注費用 発注にかかる費用

$$c_1F(T) + c_2\bar{F}(T) \quad (23)$$

以上から一周期当りの平均時間は、

$$\int_0^T (L+t)dF(t) + \int_T^{T+L} (T+L)dF(t) + \int_{T+L}^{\infty} tdF(t) = \frac{1}{\lambda} + \int_T^{T+L} F(t)dt \quad (24)$$

となる。ただし、

$$\frac{1}{\lambda} = \int_t^{\infty} dF(t) = \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt \quad (25)$$

である。以上から一周期当りの期待費用は、

$$C_1(T) = \frac{k_1 \int_T^{T+L} F(t)dt + k_2 \int_{T+L}^{\infty} \bar{F}(t)dt + c_1F(T) + c_2\bar{F}(T)}{\frac{1}{\lambda} + \int_T^{T+L} F(t)dt} \quad (26)$$

となる。

3.2 発注 2(在庫しない場合)

この発注方法は基本的には発注 1 と同じ仮定を持つが異なる点としては配達された商品を在庫しない点である。発注した商品が届いた時点で、たとえ動作しているものであっても取替る。この方法の利点として在庫品の管理にかかる労力、スペースを省略することが挙げられる。この発注方法は在庫の管理を必要としないため、在庫費用は 0 となる。これをふまえて一周期当りの期待費用を求めると、

$$C_2(T) = \frac{k_1 \int_T^{T+L} F(t)dt + c_1 F(T) + c_2 \bar{F}(T)}{L + \int_0^T \bar{F}(t)dt} \quad (27)$$

となる。

4 品切および部品補給を考慮した取替

このモデルはシステムの一部品が k 個故障すると、全体のシステムが故障するモデルとする。途中で故障したとしてもその場で取替を行わずに T まで放置する。そして、期間 T の経過と同時に取替を行う。このとき品切費用を s 、部品 k 個以上故障した場合故障 1 個にかかる費用を p とする。一周期当りの期待費用は、

$$c_2 + s \int_0^T F(T)dt + p \left[\sum_{j=k+1}^{\infty} (j-k) \frac{(k\lambda T)^j}{j!} e^{-k\lambda T} \right] \quad (28)$$

となる。次に一周期当りの期待費用を T で割ることで単位時間当りの期待費用を求める。よって単位時間当りの期待費用 $C(T)$ は、

$$\frac{c_2 + s \int_0^T F(T)dt + p \left[\sum_{j=k+1}^{\infty} (j-k) \frac{(k\lambda T)^j}{j!} e^{-k\lambda T} \right]}{T} \quad (29)$$

となる。

4.1 解析

この取替はポアソン過程で故障し、 k -Erlang 分布 (パラメータ $k\lambda$ の指数分布における k 個の和の分布) におけるパラメータを k とする。よって $F(T)$ は、

$$F(T) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(k\lambda T)^j}{j!} e^{-k\lambda T} \quad (30)$$

となる。次に計算を容易にするため *Mathematica* を用いて不完全ガンマ関数によってあらわす。 $\int_0^T F(T)dt$ を解くと、

$$\begin{aligned} \int_0^T F(T)dt &= \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_0^T (k\lambda T)^j e^{-k\lambda T} dt \\ &= e^{-k\lambda T} T \left\{ e^{k\lambda T} - \frac{e^{k\lambda T} \gamma(k, k\lambda T)}{\Gamma(k)} \right\} \\ &= T \left\{ 1 - \frac{\gamma(k, k\lambda T)}{\Gamma(k)} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。次に、 $\sum_{j=k+1}^{\infty} (j-k) \frac{(k\lambda T)^j}{j!} e^{-k\lambda T}$ を解くと、

$$\begin{aligned} &\sum_{j=k+1}^{\infty} (j-k) \frac{(k\lambda T)^j}{j!} e^{-k\lambda T} \\ &= k\lambda T \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(k\lambda T)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-k\lambda T} - k \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(k\lambda T)^j}{j!} e^{-k\lambda T} \\ &= e^{-k\lambda T} \left\{ e^{k\lambda T} k\lambda T - \frac{e^{k\lambda T} k\lambda T \gamma(k, k\lambda T)}{\Gamma(k)} \right. \\ &\quad \left. - k e^{-k\lambda T} \left\{ e^{k\lambda T} - \frac{e^{k\lambda T} \gamma(1+k, k\lambda T)}{\Gamma(1+k)} \right\} \right\} \\ &= k \left[\lambda T \left\{ 1 - \frac{\gamma(k, k\lambda T)}{\Gamma(k)} \right\} - 1 + \frac{\gamma(1+k, k\lambda T)}{\Gamma(1+k)} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ただし、不完全ガンマ関数を、

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt \quad (33)$$

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad (34)$$

とする。よって (31), (32) 式より $C(T)$ は、

$$\begin{aligned} C(T) &= \frac{c_2}{T} + s \left\{ 1 - \frac{\gamma(k, k\lambda T)}{\Gamma(k)} \right\} \\ &\quad + \frac{pk}{T} \left[\lambda T \left\{ 1 - \frac{\gamma(k, k\lambda T)}{\Gamma(k)} \right\} - 1 + \frac{\gamma(1+k, k\lambda T)}{\Gamma(1+k)} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

となる。

4.2 考察

4.2.1 具体例を挙げて考える

平均稼働時間が 1 年、システムダウンのとき、1 年当りにかかる費用を 10 万円、1 ユニットが故障するごとにかかる費用を 20 万円、周期が経過したときにシステムを取替る費用を 50 万円とすると、多くのユニットからなる 1 つのシステムを考える。すると、 T と $C(T)$ の関係は以下ようになる。ただしこのとき、単位を T 年、 $C(T)$ 万円とする。

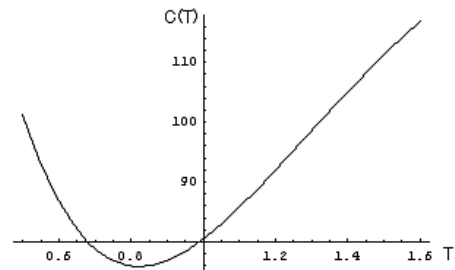


図1. この例の最適費用

このとき、最適な取替周期は 0.825 年、つまり 9.9 ヶ月で、そのときの 1 年当りにかかる期待費用は、75.9 万円となる。

次にこのときの収束地点について考える。次の図 2 は取替周期 T を大きくしても、単位時間当りの期待費用はおよそ 200 万円に収束していることをあらわしている。つまり、10 年ごとに取替ても、20 年ごとに取替ても、1 年当りにおよそ 200 万円必要なのである。

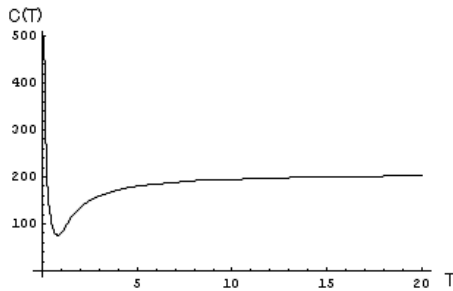


図2. この例の収束地点

4.2.2 この取替問題から分かること

これまでに私たちは、この取替問題について、パラメータを固定することで得られるグラフについて理解を深めた。平均稼働時間が長くなるほど、最適な期待費用も小さくなるのが分かる。 $k=10$ のとき、最適な期待費用 $C(T^*)$ が最大になっている。 k の値は、故障時間の分布をあらわし、 k が大きくなるにつれて故障時間の散らばりがなくなっていくというものであった。つまり、故障時間が予測可能である方が期待費用は小さくなっていくのである。また k が小さいとき、つまり故障時間の予測が立てにくいとき、期待費用が若干小さくなっている。これは長持ちする部品が増えることによって期待費用が小さくなるからだと考えられる。

s, p においては費用をあらわすパラメータなので、小さい方が、より小さな期待費用 $C(T^*)$ を得る。

以上から

1. 故障しにくい物の方が期待費用は小さくなる。
2. 故障時期が予測しやすい物の方が期待費用は小さくなる。
3. 品切費用が小さい物の方が期待費用は小さくなる。
4. 部品故障にかかる費用が小さい方が期待費用は小さくなる。

ということが言える。

また、4 つのパラメータについて解析したグラフを見てみると、全てのグラフがある地点に収束していることが分かる。これらの標本からおそらく、 $pk\lambda$ へと向かって収束していると思われる。

5 おわりに

本研究で最も力を注いだ分野は品切および部品補給を考慮したブロック取替である。本研究では最適な期待費用を求めるために与えられた期待費用を求める一般式を解析的に解くことを断念し、*Mathematica* を用いて一般式を不完全ガンマ関数を用いた式に変形した。その式で品切費用、平均故障時間、部品の故障個数、故障部品 1 個当りにかかる費用の 4 つのパラメータの値を変化させ、それら様々な条件下において変数を代入した一般式をさらに *Mathematica* でグラフ化することによって最適な期待費用を求めた。今回の数式はそのままの形では複雑であったが、*Mathematica* を用いることで k -Erlang 分布であらわされている一般式を不完全ガンマ関数を用いた式に変形しパラメータを代入することでグラフ化することができた。またパラメータを変化させることでさまざまな場合における具体例を挙げることでできたので *Mathematica* が本研究において非常に大きな助けとなった。

謝辞

本研究を進めるにあたり、尾崎俊治教授には多くの助言と御指導を、また尾崎ゼミの皆様には *TeX* の使い方などを大変参考にさせて頂きました。ありがとうございました。

参考文献

- [1] 三根久, 河合一 著, 「信頼性・保全性の数理」, 朝倉書店, 1982 年。
- [2] 依田浩, 尾崎俊治, 中川鞆夫 著, 「応用確率論」, 朝倉書店, 1977 年。
- [3] S. Osaki, Optimal Maintenance Policies for Stochastic Systems, International Conference on Ranking and Selection, Multiple Comparisons, Reliability and Their Applications, Chennai, India, Dec. 28-30, 2002.
- [4] S. Osaki, Applied Stochastic System Modeling, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [5] S. Osaki, Stochastic System Reliability Modeling, World Scientific, Singapore, 1985.
- [6] N. Kaio and S. Osaki, Int. J. System Sci, Vol. 19, No. 1, pp. 171-177, 1988.
- [7] 尾崎俊治, 「確率モデル入門」, 朝倉書店, 1996.
- [8] K. Hastings, Introduction to Probability with Mathematica, Chapman & Hall/CRC, New York, 2001.
- [9] S. Wolfram, Mathematica TM, a System for Doing Mathematics by Computer, Addison-Wesley, 1988.