一般化ハート型分布におけるパラメータ推定について

2020SS010 林佑樹　2020SS004 藤田大悟

指導教員：塩濱敬之

1　はじめに

データが円周上に値を取る角度データにおける統計学は方向統計学 (Directional Statistics) と呼ばれる．方向統計学では円周上の確率分布を用いて, 円周上に値を取るデータの分析を行う．一般化ハート型分布 (Jones-Pewsey Distribution) は, 代表的な円周分布であるフォン・ミーゼス分布, ハート型分布, 巻き込みコーシー分布などをその特殊形として含む円周上の対称分布である．本研究では, 一般化ハート型分布のパラメータ推定方法について考える．以下, 一般化ハート型分布を JP 分布と呼称する．母数推定方法には, 最尤推定法, モーメント法, 一般化モーメント法を用いる．

2　円周分布とその代表値

分布の台を単位円周にもつ分布を円周分布という．円周上の確率密度関数 $f(\theta)$ は次の性質を持つ．

- $f(\theta) \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi)$
- $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$
- $f(\theta + 2k\pi) = f(\theta),\ k \in \mathbb{Z}$ (周期性)

周期性があるために, 通常の期待値が定義できない．そこで p 次三角モーメントが定義される．今, n 個の角度データの標本 $\theta_1, \cdots \theta_n$ を観測したとする．p を正の整数とするとき, 平均方向 $\bar{\theta}$ 回りの標本 p 次モーメントを次のように定義する．

$$m_p = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \cos\{p(\theta_j - \bar{\theta})\} + i\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \sin\{p(\theta_j - \bar{\theta})\}$$

円周上の連続型確率変数 Θ に対する理論 p 次三角モーメントは次で定義される．

$$\phi_p = E(e^{ip\Theta}) = \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} f(\theta) d\theta$$

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ から, $\phi_p = \alpha_p + i\beta_p$ と分解される．ここで,

$$\alpha_p = E\{\cos(p\Theta)\} = \int_0^{2\pi} \cos(p\theta) f(\theta) d\theta$$

$$\beta_p = E\{\sin(p\Theta)\} = \int_0^{2\pi} \sin(p\theta) f(\theta) d\theta$$

であり, α_p は p 次余弦モーメント, β_p は p 次正弦モーメントと呼ばれる．次に, 本研究で扱う JP 分布を定義する．JP 分布の確率密度関数は $(0 \leq \theta < 2\pi)$ において次式で定義される．

$$f(\theta) = \frac{\{\cosh(\kappa\psi)\}^{1/\psi}\{1 + \tanh(\kappa\psi)\cos(\theta - \mu)\}^{1/\psi}}{2\pi P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))} \tag{1}$$

ただし, $P_{1/\psi}$ は次の 0 次の第 1 種ルジャンドル陪関数である．

$$\int_0^{\pi} (z + \sqrt{z^2 - 1}\cos x)^{1/\psi} dx = \pi P_{1/\psi}(z)$$

μ は平均方向, κ は集中度, ψ はモード付近の形状を制御するパラメータである． パラメータ $(\mu, \kappa, \psi) \in \{(0, 2, 0), (0, 1, 1), (-\pi/3, 2, -1)\}$ としたときの密度関数のプロットを図 1 に示した．

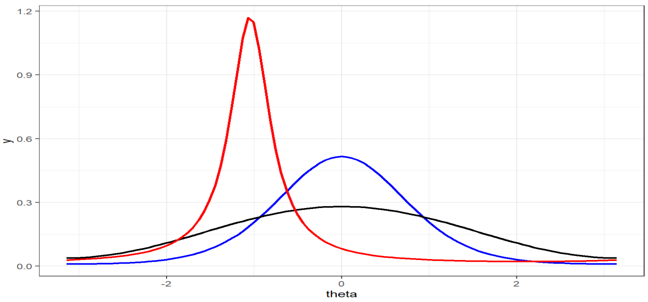

図 1　JP 分布の密度関数のグラフ．青線: $\mu = 0,\ \kappa = 2,\ \psi = 0$ (フォン・ミーゼス分布), 黒線: $\mu = 0,\ \kappa = 1,\ \psi = 1$ (カージオイド分布), 赤線: $\mu = -\pi/3,\ \kappa = 2,\ \psi = -1$ (巻き込みコーシー分布)

3　母数の推定方法について

JP 分布の母数推定方法として, 最尤推定法, モーメント法 (MM), 一般化モーメント法 (GMM) の 3 手法を紹介する．パラメータベクトルを $\boldsymbol{\eta} = (\mu, \kappa, \psi)^T$ とし, そのパラメータ空間を $\boldsymbol{H}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{\eta} | \mu \in [-\pi, \pi), \kappa \in (0, \infty), \psi \in \mathbb{R}\}$$

また, $I_p(\kappa)$ を p 次の修正ベッセル関数

$$I_p(\kappa) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(p\theta) e^{\kappa\cos\theta} d\theta \tag{2}$$

とし, $A(\kappa) = I_1(\kappa)/I_0(\kappa)$ とする．

3.1　最尤推定法

JP 分布の最尤推定法について考える．JP 分布の尤度関数 $L(\kappa, \psi, \mu)$ は,

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\cosh(\kappa\psi)^{1/\psi}\{1 + \tanh(\kappa\psi)\cos(\theta_i - \mu)\}^{1/\psi}}{2\pi P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))}$$

と表せる．以降, パラメータ集合 $\tilde{\boldsymbol{H}}(\tilde{\boldsymbol{H}} \subset \boldsymbol{H})$ はコンパクトとし, パラメータの真値 $\boldsymbol{\eta}_0$ は $\tilde{\boldsymbol{H}}$ の内点にあると仮定する．また, 対数尤度関数は

$$
\begin{aligned}
\log L(\kappa, \psi, \mu) = &\frac{n}{\psi} \log\{\cosh(\kappa\psi)\} \\
&+ \frac{1}{\psi} \sum_{i=1}^{n} \log\{1 + \tanh(\kappa\psi)\cos(\theta_i - \mu)\} \\
&- n \log\left\{2\pi P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))\right\}
\end{aligned}
$$

と表すことができる．これより, 最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\mathrm{MLE})}$ は次の様に定義される．

$$
\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\mathrm{MLE})} = \underset{\boldsymbol{\eta} \in \tilde{\boldsymbol{H}}}{\operatorname{argmax}} \log L(\boldsymbol{\eta}).
$$

ここで, 対数尤度関数は $\psi = 0$ で定義されないため, 最尤推定量の統計的性質を求めるには注意が必要である．そこで, 平均対数尤度を $M_n(\eta; \Theta_n) := 1/n \log L(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n)$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&M_n(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n) \\
&= \begin{cases} 1/n \log L(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n) & \psi \neq 0 \\ -\log(2\pi I_0(\kappa)) + \frac{\kappa}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos(\theta_i - \mu)) & \psi = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

また, 期待対数尤度を次のように定義する．

$$
M_0(\boldsymbol{\eta}) = \begin{cases} E[\log L(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n)] & \psi \neq 0 \\ -\log(2\pi I_0(\kappa)) + \kappa A(\kappa) & \psi = 0 \end{cases}
$$

期待対数尤度を用いて, パラメータの真値を次のように定義する．

$$
\boldsymbol{\eta}_0 = \underset{\boldsymbol{\eta} \in \tilde{\boldsymbol{H}}}{\operatorname{argmax}} M_0(\boldsymbol{\eta}).
$$

次に, 最尤推定量の漸近正規性を保証するために, 以下のように平均対数尤度のパラメータ $\boldsymbol{\eta}$ に関する 1 次導関数を定義する．

$$
\frac{\partial}{\partial\mu} M_n(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n) = \begin{cases} M_{n,\mu} & \psi \neq 0 \\ \frac{\kappa}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_i - \mu) & \psi = 0, \end{cases}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\kappa} M_n(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n) = \begin{cases} M_{n,\kappa} & \psi \neq 0 \\ -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos(\theta_i - \mu) + \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} & \psi = 0 \end{cases}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\psi} M_n(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n) = \begin{cases} M_{n,\psi} & \psi \neq 0 \\ -\frac{\kappa^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos(\theta_i - \mu) + n\kappa^2 & \\ +\frac{\kappa^2}{2n}\sin^2(\theta_i - \mu) - \frac{\kappa}{2}\frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} & \psi = 0 \end{cases}
$$

同様に, $i, j = 1, 2, 3$ に対して, 平均対数尤度の 2 階導関数を次のように定義する

$$
\frac{\partial^2}{\partial\eta_i\partial\eta_j} M_n(\boldsymbol{\eta}, \Theta_n) = \begin{cases} M_{n,\eta_i\eta_j} & \psi \neq 0 \\ M^{(\psi_0)}_{n,\eta_i\eta_j} & \psi = 0. \end{cases}
$$

また, $i, j = 1, 2, 3$ に対して, 平均対数尤度の 2 階導関数の期待値を次のように定義する

$$
E_{\eta_0}\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta_i\partial\eta_j} M_n(\boldsymbol{\eta}, \Theta_n)\right] = \begin{cases} M_{ij} & \psi \neq 0 \\ M^{(\psi_0)}_{ij} & \psi = 0. \end{cases}
$$

ここで, $M_{n,\mu}$, $M_{n,\kappa}$, $M_{n,\psi}$, $M_{n,\eta_i\eta_j}$, $M^{(\psi_0)}_{n,\eta_i\eta_j}$, M_{ij}, および $M^{(\psi_0)}_{ij}$ の定義はスペースの都合上本論で示す．これより, 平均対数尤度関数は $M_0(\boldsymbol{\eta}_0)$ に一様収束する．

$$
\sup_{\boldsymbol{\eta} \in \tilde{\boldsymbol{H}}} |M_n(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Theta}_n) - M_0(\boldsymbol{\eta}_0)| \to_p 0
$$

また, 1 次 2 次の導関数は, $\psi = 0$ において連続かつその絶対値は有界である．これより, JP 分布において $\psi = 0$ は除去可能な不連続点であることがわかった．最尤推定量の一致性と漸近正規性が成り立つ．

定理 1 $\boldsymbol{M}_{\eta_0} = \left[-E_{\eta_0}\left[\partial^2/\partial\eta_i\partial\eta_j M_n(\boldsymbol{\eta}, \Theta_n)\right]\right]_{i,j=1,2,3}$ は正則とする． このとき, $n \to \infty$ とすると, 最尤推定量 $\boldsymbol{\eta}_n^{(\mathrm{MLE})}$ は, 一致推定量である．

$$
\boldsymbol{\eta}_n^{(\mathrm{MLE})} \to_p \boldsymbol{\eta}_0, \quad n \to \infty
$$

また, $n \to \infty$ とすると以下の正規分布に従う

$$
\sqrt{n}(\boldsymbol{\eta}_n^{(\mathrm{MLE})} - \boldsymbol{\eta}_0) \to_d N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{M}_{\eta_0}^{-1}).
$$

3.2 モーメント法

モーメント法 (MM, Method of Moments) は理論モーメントと標本モーメントを等置させた連立方程式をパラメータについて解き, 得られた解をパラメータ推定値とする手法である．

(1) 式で定義された JP 分布の平均方向 μ まわりの理論 p 次三角モーメントを考える．JP 分布は平均方向に対して対称な分布なので, p 次正弦モーメントは $\bar{\beta}_p \equiv E[\sin\{p(\Theta - \mu)\}] = 0$ であることに注意しておく．すると, 平均方向 μ まわりの理論 p 次三角モーメント $E\{e^{ip(\Theta-\mu)}\}$ は,

$$
\phi_p = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(1/\psi + 1)P^p_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))}{\Gamma(1/\psi + p + 1)P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))} & (\psi > 0) \\ \dfrac{I_p(\kappa)}{I_0(\kappa)} & (\psi = 0) \\ \dfrac{\Gamma(1/|\psi| - p)P^p_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))}{\Gamma(1/|\psi|)P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))} & (\psi < 0) \end{cases} \quad (3)
$$

と表せる．ここで, $P^m_\nu(z)$ は p 次の第 1 種ルジャンドル陪関数である．

$$
\begin{aligned}
P^m_\nu(z) = &(-1)^m \frac{(\nu - 1)(\nu - 2)\dots(\nu - m + 1)}{\pi} \\
&\times \int_0^\pi \frac{\cos m\varphi \, d\varphi}{[z + \sqrt{z^2 - 1}\cos\varphi]^{\nu+1}} \quad \left[|\arg z| < \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}
$$

また, $I_p(\kappa)$ は (2) で定義した p 次の第 1 種修正ベッセル関数である．JP 分布の理論 p 次正弦・余弦モーメントは ϕ_p より, 次のように与えられる．

$$
\alpha_p = \bar{\alpha}_p \cos p\mu, \quad \beta_p = \bar{\alpha}_p \sin p\mu
$$

したがって, モーメント条件式は,

$$\begin{aligned}\alpha_p &\equiv \bar{\alpha}_p \cos p\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos p\theta_i \\ \beta_p &\equiv \bar{\alpha}_p \sin p\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin p\theta_i\end{aligned} \qquad (p = 1, 2, \cdots, K)$$

である．母数 $\boldsymbol{\eta}_0 = (\mu_0,\, \kappa_0\, \psi_0)^\top$ を推定するためにこのモーメント条件を使用する．モーメント条件は理論 p 次三角モーメントと標本 p 次三角モーメントを等値させるので

$$C_p = \cos\mu \frac{\Gamma(1/\psi+1)P^p_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))}{\Gamma(1/\psi+p+1)P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))}$$

$$S_p = \sin\mu \frac{\Gamma(1/\psi+1)P^p_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))}{\Gamma(1/\psi+p+1)P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))}$$

を満たす．モーメント推定量の漸近分布は, 次節 GMM の特殊な場合に帰着するのため, 次節で GMM とまとめて述べる．

3.3　GMM

GMM はモーメント条件の数がパラメータの数以上のときに使われるパラメータ推定の手法である．推定したいパラメータを $\boldsymbol{\eta} = (\kappa, \psi, \mu)^\top$ とし, $K (\geq 3)$ 個のモーメント条件 $g_j(\boldsymbol{\eta})$ が与えられたとする．モーメント条件については, モーメント法と同じく, 理論モーメントと標本モーメントを等値させたものである．

$$g_i(\boldsymbol{\eta}) \equiv [g_{1i}(\boldsymbol{\eta}), g_{2i}(\boldsymbol{\eta}), \ldots, g_{Ki}(\boldsymbol{\eta})]^T \tag{4}$$

とおく．ここで,

$$g_{1i}(\boldsymbol{\eta}) = \alpha_1 - \cos\theta_i,\ g_{2i}(\boldsymbol{\eta}) = \beta_1 - \sin\theta_i,$$

$$g_{Ki} = \begin{cases}\beta_{K/2} - \sin((K/2)\theta_i) & (K\text{ は偶数}) \\ \alpha_{\lceil K/2\rceil} - \cos(\lceil K/2\rceil\theta_i) & (K\text{ は奇数})\end{cases}$$

である．ただし, $\lceil x\rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} |\, x \leq n\}$ である真のパラメータを $\boldsymbol{\eta}_0$ は (4) の期待値 $E[g_1(\boldsymbol{\eta})] = 0$ の解とする．したがって $E\left[g(\boldsymbol{\eta}_0)\right] = \mathbf{0}$ を満たす．

$$\bar{g}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\theta_i,\, \boldsymbol{\eta})$$

とおくと, GMM によるパラメータの推定量は,

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\mathrm{GMM})} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\eta}\in\tilde{\boldsymbol{H}}} \bar{g}(\boldsymbol{\eta})^\top \hat{W} \bar{g}(\boldsymbol{\eta})$$

である．$\hat{W}$ は次を満たす $K \times K$ の半正定値対称行列である．

$$\hat{W} = (E_n[(g(\boldsymbol{\eta}^{pre})\, g(\boldsymbol{\eta}^{pre})^\top])^{-1}$$

$$\boldsymbol{\eta}^{pre} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\eta}\in\tilde{\boldsymbol{H}}} \bar{g}(\boldsymbol{\eta})^\top \bar{g}(\boldsymbol{\eta})$$

GMM の漸近分布は, JP 分布の p 次正弦・余弦モーメントの 2 階導関数の連続性と微分可能性, 及びその絶対値の有界性を仮定したときに次のように与えられる．

定理 2 以下で定義する $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\eta}_0)$ は正則であるとする．このとき, $\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\mathrm{GMM})}$ に対して, 一致性と漸近正規性が成り立つ．

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\mathrm{GMM})} \to_p \boldsymbol{\eta}_0,$$

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\mathrm{GMM})} - \boldsymbol{\eta}_0) \to_d N(\mathbf{0}, (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_0))^{-1}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\eta}_0)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_0))^{-1})$$

ここで

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_0) = E\left[-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}_0^T} g_1(\Theta, \boldsymbol{\eta}_0)\right],$$

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\eta}_0) = E\left[g_1(\Theta, \boldsymbol{\eta}_0) g_1(\Theta, \boldsymbol{\eta}_0)^T\right]$$

である．

3.4　シミュレーション

前節までに挙げた母数推定手法のパフォーマンスを比較する．手法は次の通りである．

- 最尤推定法, モーメント法, 一般化モーメント法による JP 分布の母数推定を 1000 回繰り返す．
- 使用するデータのサンプルサイズ n を 100, 200, 300 と増やし, 各サンプルサイズでのシミュレーションの結果を考える．
- 評価指数 (RMSE, Bias) を各手法でパフォーマンスを比較する．

次は, $\boldsymbol{\eta} = (0, 2, -1)^\top$ での推定結果である．

表 1　最尤推定法による母数推定結果

n	Bias(μ)	RMSE(μ)	Bias(κ)	RMSE(κ)	Bias(ψ)	RMSE(ψ)
100	-0.002	0.041	0.012	0.272	-0.014	0.251
200	0.001	0.030	0.006	0.176	-0.009	0.165
300	0.001	0.024	0.005	0.149	-0.005	0.142

表 2　MM による母数推定結果

n	Bias(μ)	RMSE(μ)	Bias(κ)	RMSE(κ)	Bias(ψ)	RMSE(ψ)
100	-0.002	0.057	0.125	0.305	-0.027	0.393
200	0.001	0.042	0.063	0.196	-0.038	0.289
300	0.002	0.036	0.041	0.132	-0.019	0.234

表 3　GMM による推定結果 ($p = 10$)

n	Bias(μ)	RMSE(μ)	Bias(κ)	RMSE(κ)	Bias(ψ)	RMSE(ψ)
100	-0.001	0.062	0.720	1.023	0.364	0.500
200	0.001	0.032	0.207	0.337	0.148	0.249
300	0.001	0.025	0.126	0.201	0.102	0.187

結果からわかることとして次を挙げる．

- サンプルサイズ n が大きくなると RMSE の値が小さくなっており, 一致性が確認できる．
- RMSE を比較すると MLE が最も小さく, MLE の有効性が確認できる．

また, 母数の値によっては推定がうまくいかないことがあった．

4　分布の変形と非対称化モデル

$\theta \mapsto \theta + \nu \sin\theta$ を Batschelet-Papakonstantinou 変換という． ν は $-1 \le \nu < 0$ ならモードの付近で扁平 (flat-topped) であり, $0 < \nu \le 1$ ならより急峻 (sharply-peaked) となる． $f_0(\theta)$ を η に対して対称な円周確率密度関数とするとき, 次の形

$$f(\theta) = f_0(\theta - \eta)\{1 + \lambda \sin(\theta - \eta)\} \quad (-1 \le \lambda \le 1)$$

を持つ分布を正弦関数摂動法による非対称分布 (sine-skewed distribution) と呼ぶ． 図 2 と図 3 に Batschelet-Papakonstantinou 変換と SSJP 分布の密度関数をプロットした．

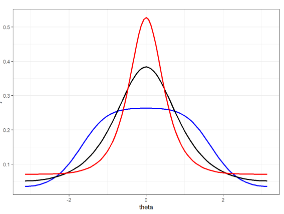

図 2　Batschelet-Papakonstantinou 変換による密度関数のグラフ.$\nu = -4/5$ (青線); $\nu = 0$ (黒線); $\nu = 4/5$ (赤線)

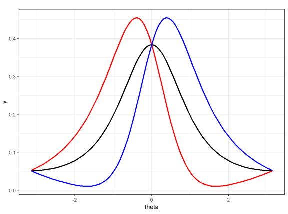

図 3　SSJP 分布の密度関数のグラフ. $\lambda = 0.9$ (青線); $\lambda = 0$ (黒線); $\lambda = -0.9$ (赤線)

5　データ解析

2014 年から 2022 年までの台風発生日の角度データを用いてデータ解析を行う．標本数は $n = 231$ である．JP 分布と, JP 分布を正弦関数摂動法により非対称化した sine-skewed JP 分布を当てはめる．また AIC や尤度比検定を行い, 両分布のモデル評価を行う．

5.1　分布の当てはめ

JP 分布と sine-skewed JP 分布で, 台風発生日データに対してパラメータ推定を行った．データのヒストグラムと推定した密度関数のプロットを図 4 および図 5 に示した．

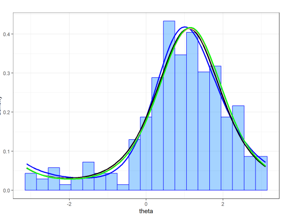

図 4　台風データのヒストグラムと SSJP 分布の MLE (青線); MM (黒線); GMM (その他) の密度関数のグラフ

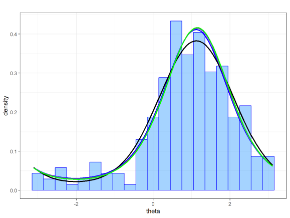

図 5　台風データのヒストグラム と JP 分布の MLE(青線); MM (黒線); GMM (その他) の密度関数のグラフ

$\theta = 0$ 付近からデータ数が急増するが, MLE を使ったフィッティングでは分布の歪みが顕著に表れており, SSJP 分布の非対称性が生かされているが, MM と GMM は対称な分布となっている．SSJP 分布と JP 分布のフィッティングの評価を行うために AIC と尤度比検定を行った．AIC の数値は JP 分布と SSJP 分布に対してそれぞれ, 702.60 と 702.72 となり, JP 分布が選択される．

次に尤度比検定を行う．帰無仮説 H_0(JP 分布) と対立仮設 H_1(SSJP 分布) を以下のように定義する．

$$H_0 : \lambda = 0 \qquad H_1 : \lambda \neq 0$$

検定統計量は自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う．以下のように表す．

$$\chi_1^2 = -2\left(\log L(\hat{\boldsymbol{\eta}}_0) - \log L(\hat{\boldsymbol{\eta}})\right)$$

ただし, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_0 = (\hat{\mu_0}, \hat{\kappa_0}, \hat{\psi_0}, \lambda = 0))$ は JP 分布の最尤推定値, $\hat{\boldsymbol{\eta}} = (\hat{\mu}, \hat{\kappa}, \hat{\psi}, \hat{\lambda})$ は SSJP 分布の最尤推定値である．検定統計量と p 値はそれぞれ 1.883 と 0.17 となった．これより, 帰無仮説は棄却されず, SSJP 分布のほうが当てはまりがよいとはいえない．

6　おわりに

本研究では, 円周分布である JP 分布から乱数を生成し, 得られた乱数から JP 分布のパラメータを推定した．推定方法として, 最尤推定法, MM, GMM をを示した．また, 3 手法についてシミュレーションを行い精度の比較した．また, 実データを用いた統計分析を行った．JP 分布とそれを非対称化した分布とのデータへの当てはまりの良さを比較した．

参考文献

[1] M. C. Jones and A. Pewsey: A family of symmetric distributions on the circle, *Journal of the American Statistical Association*, Dec., 2005, Vol. 100, No. 472 (Dec., 2005), pp. 1422–1428

[2] 清水邦夫: 『角度データのモデリング』. (ISM シリーズ：進化する統計数理 / 統計数理研究所編, 7) 近代科学社, 2018.1

[3] P. Chausse: Computing generalized method of moments and generalized empirical likelihood with R, *Journal of Statistical Software*, May 2010, Volume 34, Issue 11.

[4] D. Zwillinger, A. Jeffrey: Table of Integrals, Series, and Products 7th Edition, (Feb., 2007), pp.960