

# 一般化ハート型分布におけるパラメータ推定について

2020SS010 林佑樹 2020SS004 藤田大悟

指導教員：塩濱敬之

## 1 はじめに

データが円周上に値を取る角度データにおける統計学は方向統計学 (Directional Statistics) と呼ばれる。方向統計学では円周上の確率分布を用いて、円周上に値を取るデータの分析を行う。一般化ハート型分布 (Jones-Pewsey Distribution) は、代表的な円周分布であるフォン・ミーゼス分布、ハート型分布、巻き込みコーシー分布などをその特殊形として含む円周上の対称分布である。本研究では、一般化ハート型分布のパラメータ推定方法について考える。以下、一般化ハート型分布を JP 分布と呼称する。母数推定方法には、最尤推定法、モーメント法、一般化モーメント法を用いる。

## 2 円周分布とその代表値

分布の台を単位円周にもつ分布を円周分布という。円周上の確率密度関数  $f(\theta)$  は次の性質を持つ。

- $f(\theta) \geq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$
- $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 1$
- $f(\theta + 2k\pi) = f(\theta)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (周期性)

周期性があるために、通常の期待値が定義できない。そこで  $p$  次三角モーメントが定義される。今、 $n$  個の角度データの標本  $\theta_1, \dots, \theta_n$  を観測したとする。  $p$  を正の整数とするとき、平均方向  $\bar{\theta}$  回りの標本  $p$  次モーメントを次のように定義する。

$$m_p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos\{p(\theta_j - \bar{\theta})\} + i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin\{p(\theta_j - \bar{\theta})\}$$

円周上の連続型確率変数  $\Theta$  に対する理論  $p$  次三角モーメントは次で定義される。

$$\phi_p = E(e^{ip\Theta}) = \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} f(\theta) d\theta$$

オイラーの公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  から、 $\phi_p = \alpha_p + i\beta_p$  と分解される。ここで、

$$\alpha_p = E\{\cos(p\Theta)\} = \int_0^{2\pi} \cos(p\theta) f(\theta) d\theta$$

$$\beta_p = E\{\sin(p\Theta)\} = \int_0^{2\pi} \sin(p\theta) f(\theta) d\theta$$

であり、 $\alpha_p$  は  $p$  次余弦モーメント、 $\beta_p$  は  $p$  次正弦モーメントと呼ばれる。次に、本研究で扱う JP 分布を定義する。JP 分布の確率密度関数は  $(0 \leq \theta < 2\pi)$  において次式で定

義される。

$$f(\theta) = \frac{\{\cosh(\kappa\psi)\}^{1/\psi} \{1 + \tanh(\kappa\psi) \cos(\theta - \mu)\}^{1/\psi}}{2\pi P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))} \quad (1)$$

ただし、 $P_{1/\psi}$  は次の 0 次の第 1 種ルジャンドル陪関数である。

$$\int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos x)^{1/\psi} dx = \pi P_{1/\psi}(z)$$

$\mu$  は平均方向、 $\kappa$  は集中度、 $\psi$  はモード付近の形状を制御するパラメータである。パラメータ  $(\mu, \kappa, \psi) \in \{(0, 2, 0), (0, 1, 1), (-\pi/3, 2, -1)\}$  としたときの密度関数のプロットを図 1 に示した。

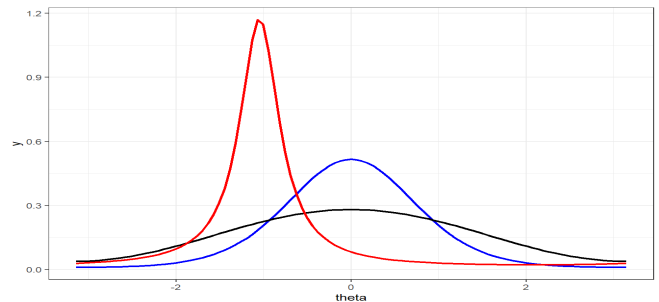


図 1 JP 分布の密度関数のグラフ。青線:  $\mu = 0, \kappa = 2, \psi = 0$  (フォン・ミーゼス分布), 黒線:  $\mu = 0, \kappa = 1, \psi = 1$  (カージオイド分布), 赤線:  $\mu = -\pi/3, \kappa = 2, \psi = -1$  (巻き込みコーシー分布)

## 3 母数の推定方法について

JP 分布の母数推定方法として、最尤推定法、モーメント法 (MM)、一般化モーメント法 (GMM) の 3 手法を紹介する。パラメータベクトルを  $\eta = (\mu, \kappa, \psi)^T$  とし、そのパラメータ空間を  $H$  を次のように定義する。

$$H = \{\eta | \mu \in [-\pi, \pi), \kappa \in (0, \infty), \psi \in \mathbb{R}\}$$

また、 $I_p(\kappa)$  を  $p$  次の修正ベッセル関数

$$I_p(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(p\theta) e^{\kappa \cos \theta} d\theta \quad (2)$$

とし、 $A(\kappa) = I_1(\kappa)/I_0(\kappa)$  とする。

### 3.1 最尤推定法

JP 分布の最尤推定法について考える。JP 分布の尤度関数  $L(\kappa, \psi, \mu)$  は、

$$\prod_{i=1}^n \frac{\cosh(\kappa\psi)^{1/\psi} \{1 + \tanh(\kappa\psi) \cos(\theta_i - \mu)\}^{1/\psi}}{2\pi P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))}$$

と表せる。以降、パラメータ集合  $\tilde{\mathbf{H}} (\tilde{\mathbf{H}} \subset \mathbf{H})$  はコンパクトとし、パラメータの真値  $\boldsymbol{\eta}_0$  は  $\tilde{\mathbf{H}}$  の内点にあると仮定する。また、対数尤度関数は

$$\begin{aligned} \log L(\kappa, \psi, \mu) &= \frac{n}{\psi} \log \{ \cosh(\kappa\psi) \} \\ &+ \frac{1}{\psi} \sum_{i=1}^n \log \{ 1 + \tanh(\kappa\psi) \cos(\theta_i - \mu) \} \\ &- n \log \{ 2\pi P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi)) \} \end{aligned}$$

と表すことができる。これより、最尤推定量  $\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\text{MLE})}$  は次の様に定義される。

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\text{MLE})} = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\eta} \in \tilde{\mathbf{H}}} \log L(\boldsymbol{\eta}).$$

ここで、対数尤度関数は  $\psi = 0$  で定義されないため、最尤推定量の統計的性質を求めるには注意が必要である。そこで、平均対数尤度を  $M_n(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n) := 1/n \log L(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n)$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} M_n(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n) &= \begin{cases} 1/n \log L(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n) & \psi \neq 0 \\ -\log(2\pi I_0(\kappa)) + \frac{\kappa}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i - \mu) & \psi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

また、期待対数尤度を次のように定義する。

$$M_0(\boldsymbol{\eta}) = \begin{cases} E[\log L(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n)] & \psi \neq 0 \\ -\log(2\pi I_0(\kappa)) + \kappa A(\kappa) & \psi = 0 \end{cases}$$

期待対数尤度を用いて、パラメータの真値を次のように定義する。

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\eta} \in \tilde{\mathbf{H}}} M_0(\boldsymbol{\eta}).$$

次に、最尤推定量の漸近正規性を保証するために、以下の様に平均対数尤度のパラメータ  $\boldsymbol{\eta}$  に関する 1 次導関数を定義する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} M_n(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n) &= \begin{cases} M_{n,\mu} & \psi \neq 0 \\ \frac{\kappa}{n} \sum_{i=1}^n \sin(\theta_i - \mu) & \psi = 0, \end{cases} \\ \frac{\partial}{\partial \kappa} M_n(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n) &= \begin{cases} M_{n,\kappa} & \psi \neq 0 \\ -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i - \mu) + \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} & \psi = 0 \end{cases} \\ \frac{\partial}{\partial \psi} M_n(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Theta}_n) &= \begin{cases} M_{n,\psi} & \psi \neq 0 \\ -\frac{\kappa^2}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i - \mu) + n\kappa^2 \\ + \frac{\kappa^2}{2n} \sin^2(\theta_i - \mu) - \frac{\kappa}{2} \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} & \psi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

同様に、 $i, j = 1, 2, 3$  に対して、平均対数尤度の 2 階導関数を次のように定義する

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j} M_n(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Theta}_n) = \begin{cases} M_{n,\eta_i \eta_j} & \psi \neq 0 \\ M_{n,\eta_i \eta_j}^{(\psi_0)} & \psi = 0. \end{cases}$$

また、 $i, j = 1, 2, 3$  に対して、平均対数尤度の 2 階導関数の期待値を次のように定義する

$$E_{\boldsymbol{\eta}_0} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j} M_n(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Theta}_n) \right] = \begin{cases} M_{ij} & \psi \neq 0 \\ M_{ij}^{(\psi_0)} & \psi = 0. \end{cases}$$

ここで、 $M_{n,\mu}, M_{n,\kappa}, M_{n,\psi}, M_{n,\eta_i \eta_j}, M_{n,\eta_i \eta_j}^{(\psi_0)}, M_{ij}$ , および  $M_{ij}^{(\psi_0)}$  の定義はスペースの都合上本論で示す。これより、平均対数尤度関数は  $M_0(\boldsymbol{\eta}_0)$  に一様収束する。

$$\sup_{\boldsymbol{\eta} \in \tilde{\mathbf{H}}} |M_n(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Theta}_n) - M_0(\boldsymbol{\eta}_0)| \rightarrow_p 0$$

また、1 次 2 次の導関数は、 $\psi = 0$  において連続かつその絶対値は有界である。これより、JP 分布において  $\psi = 0$  は除去可能な不連続点であることがわかった。最尤推定量の一致性と漸近正規性が成り立つ。

**定理 1**  $M_{\boldsymbol{\eta}_0} = [-E_{\boldsymbol{\eta}_0} [\partial^2 / \partial \eta_i \partial \eta_j M_n(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Theta}_n)]]_{i,j=1,2,3}$  は正則とする。このとき、 $n \rightarrow \infty$  とすると、最尤推定量  $\boldsymbol{\eta}_n^{(\text{MLE})}$  は、一致推定量である。

$$\boldsymbol{\eta}_n^{(\text{MLE})} \rightarrow_p \boldsymbol{\eta}_0, \quad n \rightarrow \infty$$

また、 $n \rightarrow \infty$  とすると以下の正規分布に従う

$$\sqrt{n}(\boldsymbol{\eta}_n^{(\text{MLE})} - \boldsymbol{\eta}_0) \rightarrow_d N(\mathbf{0}, \mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}_0}^{-1}).$$

### 3.2 モーメント法

モーメント法 (MM, Method of Moments) は理論モーメントと標本モーメントを等置させた連立方程式をパラメータについて解き、得られた解をパラメータ推定値とする手法である。

(1) 式で定義された JP 分布の平均方向  $\mu$  まわりの理論  $p$  次三角モーメントを考える。JP 分布は平均方向に対して対称な分布なので、 $p$  次正弦モーメントは  $\beta_p \equiv E[\sin\{p(\Theta - \mu)\}] = 0$  であることに注意しておく。すると、平均方向  $\mu$  まわりの理論  $p$  次三角モーメント  $E\{e^{ip(\Theta - \mu)}\}$  は、

$$\phi_p = \begin{cases} \frac{\Gamma(1/\psi + 1) P_{1/\psi}^p(\cosh(\kappa\psi))}{\Gamma(1/\psi + p + 1) P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))} & (\psi > 0) \\ \frac{I_p(\kappa)}{I_0(\kappa)} & (\psi = 0) \\ \frac{\Gamma(1/|\psi| - p) P_{1/\psi}^p(\cosh(\kappa\psi))}{\Gamma(1/|\psi|) P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))} & (\psi < 0) \end{cases} \quad (3)$$

と表せる。ここで、 $P_\nu^m(z)$  は  $p$  次の第 1 種ルジャンドル陪関数である。

$$\begin{aligned} P_\nu^m(z) &= (-1)^m \frac{(\nu - 1)(\nu - 2) \dots (\nu - m + 1)}{\pi} \\ &\times \int_0^\pi \frac{\cos m\varphi d\varphi}{[z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi]^{\nu+1}} \quad \left[ \left| \arg z \right| < \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

また、 $I_p(\kappa)$  は (2) で定義した  $p$  次の第 1 種修正ベッセル関数である。JP 分布の理論  $p$  次正弦・余弦モーメントは  $\phi_p$  より、次のように与えられる。

$$\alpha_p = \bar{\alpha}_p \cos p\mu, \quad \beta_p = \bar{\alpha}_p \sin p\mu$$

したがって、モーメント条件式は、

$$\begin{aligned}\alpha_p &\equiv \bar{\alpha}_p \cos p\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos p\theta_i \\ \beta_p &\equiv \bar{\alpha}_p \sin p\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin p\theta_i\end{aligned}\quad (p = 1, 2, \dots, K)$$

である。母数  $\boldsymbol{\eta}_0 = (\mu_0, \kappa_0 \psi_0)^\top$  を推定するためにこのモーメント条件を使用する。モーメント条件は理論  $p$  次三角モーメントと標本  $p$  次三角モーメントを等値させるので

$$\begin{aligned}C_p &= \cos \mu \frac{\Gamma(1/\psi + 1) P_{1/\psi}^p(\cosh(\kappa\psi))}{\Gamma(1/\psi + p + 1) P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))} \\ S_p &= \sin \mu \frac{\Gamma(1/\psi + 1) P_{1/\psi}^p(\cosh(\kappa\psi))}{\Gamma(1/\psi + p + 1) P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))}\end{aligned}$$

を満たす。モーメント推定量の漸近分布は、次節 GMM の特殊な場合に帰着するため、次節で GMM とまとめて述べる。

### 3.3 GMM

GMM はモーメント条件の数がパラメータの数以上のときに使われるパラメータ推定の手法である。推定したいパラメータを  $\boldsymbol{\eta} = (\kappa, \psi, \mu)^\top$  とし、 $K (\geq 3)$  個のモーメント条件  $g_j(\boldsymbol{\eta})$  が与えられたとする。モーメント条件については、モーメント法と同じく、理論モーメントと標本モーメントを等値させたものである。

$$g_i(\boldsymbol{\eta}) \equiv [g_{1i}(\boldsymbol{\eta}), g_{2i}(\boldsymbol{\eta}), \dots, g_{Ki}(\boldsymbol{\eta})]^\top \quad (4)$$

とおく。ここで、

$$\begin{aligned}g_{1i}(\boldsymbol{\eta}) &= \alpha_1 - \cos \theta_i, \quad g_{2i}(\boldsymbol{\eta}) = \beta_1 - \sin \theta_i, \\ g_{Ki} &= \begin{cases} \beta_{K/2} - \sin((K/2)\theta_i) & (K \text{ は偶数}) \\ \alpha_{\lceil K/2 \rceil} - \cos(\lceil K/2 \rceil \theta_i) & (K \text{ は奇数}) \end{cases}\end{aligned}$$

である。ただし、 $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | x \leq n\}$  である真のパラメータを  $\boldsymbol{\eta}_0$  は (4) の期待値  $E[g_1(\boldsymbol{\eta})] = 0$  の解とする。したがって  $E[g(\boldsymbol{\eta}_0)] = \mathbf{0}$  を満たす。

$$\bar{g}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\theta_i, \boldsymbol{\eta})$$

とおくと、GMM によるパラメータの推定量は、

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\text{GMM})} = \underset{\boldsymbol{\eta} \in \hat{H}}{\operatorname{argmin}} \bar{g}(\boldsymbol{\eta})^\top \hat{W} \bar{g}(\boldsymbol{\eta})$$

である。 $\hat{W}$  は次を満たす  $K \times K$  の半正定値対称行列である。

$$\begin{aligned}\hat{W} &= (E_n[(g(\boldsymbol{\eta}^{pre}) g(\boldsymbol{\eta}^{pre})^\top)])^{-1} \\ \boldsymbol{\eta}^{pre} &= \underset{\boldsymbol{\eta} \in \hat{H}}{\operatorname{argmin}} \bar{g}(\boldsymbol{\eta})^\top \bar{g}(\boldsymbol{\eta})\end{aligned}$$

GMM の漸近分布は、JP 分布の  $p$  次正弦・余弦モーメントの 2 階導関数の連続性と微分可能性、及びその絶対値の有

界性を仮定したときに次のように与えられる。

**定理 2** 以下で定義する  $\mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}_0)$  は正則であるとする。このとき、 $\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\text{GMM})}$  に対して、一致性と漸近正規性が成り立つ。

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\text{GMM})} &\rightarrow_p \boldsymbol{\eta}_0, \\ \sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\text{GMM})} - \boldsymbol{\eta}_0) &\rightarrow_d N(\mathbf{0}, (\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_0))^{-1} \mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}_0) \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_0)^{-1})\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_0) &= E \left[ -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}_0^\top} g_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}_0) \right], \\ \mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}_0) &= E [g_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}_0) g_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}_0)^\top]\end{aligned}$$

である。

### 3.4 シミュレーション

前節までに挙げた母数推定手法のパフォーマンスを比較する。手法は次の通りである。

- 最尤推定法、モーメント法、一般化モーメント法による JP 分布の母数推定を 1000 回繰り返す。
- 使用するデータのサンプルサイズ  $n$  を 100, 200, 300 と増やし、各サンプルサイズでのシミュレーションの結果を考える。
- 評価指数 (RMSE, Bias) を各手法でパフォーマンスを比較する。

次は、 $\boldsymbol{\eta} = (0, 2, -1)^\top$  での推定結果である。

表 1 最尤推定法による母数推定結果

$n$	Bias( $\mu$ )	RMSE( $\mu$ )	Bias( $\kappa$ )	RMSE( $\kappa$ )	Bias( $\psi$ )	RMSE( $\psi$ )
100	-0.002	0.041	0.012	0.272	-0.014	0.251
200	0.001	0.030	0.006	0.176	-0.009	0.165
300	0.001	0.024	0.005	0.149	-0.005	0.142

表 2 MM による母数推定結果

$n$	Bias( $\mu$ )	RMSE( $\mu$ )	Bias( $\kappa$ )	RMSE( $\kappa$ )	Bias( $\psi$ )	RMSE( $\psi$ )
100	-0.002	0.057	0.125	0.305	-0.027	0.393
200	0.001	0.042	0.063	0.196	-0.038	0.289
300	0.002	0.036	0.041	0.132	-0.019	0.234

表 3 GMM による推定結果 ( $p = 10$ )

$n$	Bias( $\mu$ )	RMSE( $\mu$ )	Bias( $\kappa$ )	RMSE( $\kappa$ )	Bias( $\psi$ )	RMSE( $\psi$ )
100	-0.001	0.062	0.720	1.023	0.364	0.500
200	0.001	0.032	0.207	0.337	0.148	0.249
300	0.001	0.025	0.126	0.201	0.102	0.187

結果からわかることとして次を挙げる。

- サンプルサイズ  $n$  が大きくなると RMSE の値が小さくなっており、一致性が確認できる。
- RMSE を比較すると MLE が最も小さく、MLE の有効性が確認できる。

また、母数の値によっては推定がうまくいかないことがあった。

## 4 分布の変形と非対称化モデル

$\theta \mapsto \theta + \nu \sin \theta$  を Batschelet-Papakonstantinou 変換という。  $\nu$  は  $-1 \leq \nu < 0$  ならモードの付近で扁平 (flat-topped) であり,  $0 < \nu \leq 1$  ならより急峻 (sharply-peaked) となる。  $f_0(\theta)$  を  $\eta$  に対して対称な円周確率密度関数とすると、次の形

$$f(\theta) = f_0(\theta - \eta)\{1 + \lambda \sin(\theta - \eta)\} \quad (-1 \leq \lambda \leq 1)$$

を持つ分布を正弦関数摂動法による非対称分布 (sine-skewed distribution) と呼ぶ。 図 2 と図 3 に Batschelet-Papakonstantinou 変換と SSJP 分布の密度関数をプロットした。

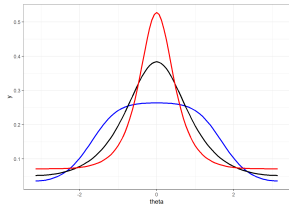


図 2 Batschelet-Papakonstantinou 変換による密度関数のグラフ。 $\nu = -4/5$  (青線);  $\nu = 0$  (黒線);  $\nu = 4/5$  (赤線)

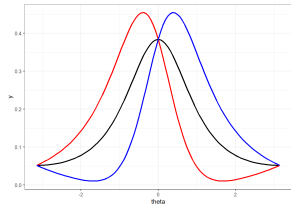


図 3 SSJP 分布の密度関数のグラフ。

$\lambda = 0.9$  (青線);  $\lambda = 0$  (黒線);  $\lambda = -0.9$  (赤線)

## 5 データ解析

2014 年から 2022 年までの台風発生日の角度データを用いてデータ解析を行う。標本数は  $n = 231$  である。JP 分布と、JP 分布を正弦関数摂動法により非対称化した sine-skewed JP 分布を当てはめる。また AIC や尤度比検定を行い、両分布のモデル評価を行う。

### 5.1 分布の当てはめ

JP 分布と sine-skewed JP 分布で、台風発生日データに対してパラメータ推定を行った。データのヒストグラムと推定した密度関数のプロットを図 4 および図 5 に示した。

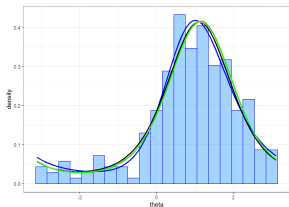


図 4 台風データのヒストグラムと SSJP 分布の MLE (青線); MM (黒線); GMM (その他) の密度関数のグラフ

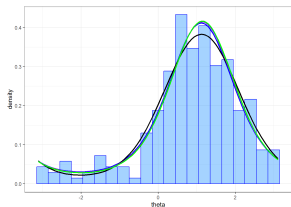


図 5 台風データのヒストグラムと JP 分布の MLE (青線); MM (黒線); GMM (その他) の密度関数のグラフ

$\theta = 0$  付近からデータ数が急増するが、MLE を使ったフィッティングでは分布の歪みが顕著に表れており、SSJP 分布の非対称性が生かされているが、MM と GMM は対称な分布となっている。SSJP 分布と JP 分布のフィッティングの評価を行うために AIC と尤度比検定を行った。AIC の数値は JP 分布と SSJP 分布に対してそれぞれ、702.60 と 702.72 となり、JP 分布が選択される。

次に尤度比検定を行う。帰無仮説  $H_0$  (JP 分布) と対立仮説  $H_1$  (SSJP 分布) を以下のように定義する。

$$H_0 : \lambda = 0 \quad H_1 : \lambda \neq 0$$

検定統計量は自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う。以下のよう表す。

$$\chi_1^2 = -2(\log L(\hat{\eta}_0) - \log L(\hat{\eta}))$$

ただし、 $\hat{\eta}_0 = (\hat{\mu}_0, \hat{\kappa}_0, \hat{\psi}_0, \lambda = 0)$  は JP 分布の最尤推定値、 $\hat{\eta} = (\hat{\mu}, \hat{\kappa}, \hat{\psi}, \hat{\lambda})$  は SSJP 分布の最尤推定値である。検定統計量と  $p$  値はそれぞれ 1.883 と 0.17 となった。これより、帰無仮説は棄却されず、SSJP 分布のほうが当てはまりがよいとはいえない。

## 6 おわりに

本研究では、円周分布である JP 分布から乱数を生成し、得られた乱数から JP 分布のパラメータを推定した。推定方法として、最尤推定法、MM、GMM を示した。また、3 手法についてシミュレーションを行い精度の比較した。また、実データを用いた統計解析を行った。JP 分布とそれを非対称化した分布とのデータへの当てはまりの良さを比較した。

## 参考文献

- [1] M. C. Jones and A. Pewsey: A family of symmetric distributions on the circle, *Journal of the American Statistical Association*, Dec., 2005, Vol. 100, No. 472 (Dec., 2005), pp. 1422–1428
- [2] 清水邦夫: 『角度データのモデリング』。(ISM シリーズ: 進化する統計数理 / 統計数理研究所編, 7) 近代科学社, 2018.1
- [3] P. Chausse: Computing generalized method of moments and generalized empirical likelihood with R, *Journal of Statistical Software*, May 2010, Volume 34, Issue 11.
- [4] D. Zwillinger, A. Jeffrey: Table of Integrals, Series, and Products 7th Edition, (Feb., 2007), pp.960