

高等学校数学における思考力を鍛える指導法の考察

—公式の導出を中心として—

2020SS034 丸地 竜誠

指導教員：佐々木 克巳

1 はじめに

本研究の目的は、高等学校数学における公式・性質の指導法の例を複数挙げ、その例を、思考力を鍛える視点で比較・考察することである。この研究に興味を持ったのは、今年度の教育実習において、同じ単元でも教師によって導入法が異なることを知り、それらの違いに興味を持ったからである。具体的に扱った公式・性質は、次の2つである。

- ・2次式の平方完成の公式
- ・楕円の方程式が $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ であること。

本稿では、楕円の方程式が $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ であることを導入する指導法を、思考力を鍛える視点で比較・考察した結果を示す。まず、楕円の定義を示す。

定義 1.1.2 定点 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ からの距離の和が一定である点の軌跡を楕円といい、この2点 F, F' を楕円の焦点という。ただし、 $c > 0$ であり、距離の和の一定値は $2c$ より大きいとする。

[1]では、この定義に基づいて、楕円の方程式を導入しているが、応用問題として、次の2つの図形も同じ方程式で表現できることも述べている。

図形 1. 円を、その円の中心を通るある直線をもとにして、その直線の垂直方向に定数倍してできる図形

図形 2. 線分 AB の端点 A が x 軸上、端点 B が y 軸上を線分 AB の長さを変えずに動くとき、線分 AB を $a:b$ に内分する点 P の軌跡

図 1 に中心 $(0,0)$ 、半径 1 の円を、 x 軸をもとにして、 y 軸方向に 2 倍してできる図形 1 を示す。図 2 に、線分 AB の長さが 5、 $a:b=2:3$ の場合の図形 2 を示す。

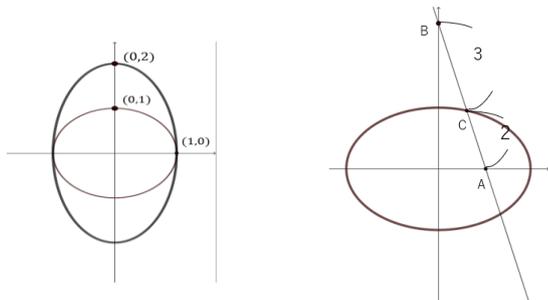


図 1 : 図形 1 の例 図 2: 図形 2 の例

本研究で、比較・考察する指導法は、これらの図形に関連する指導法、すなわち、次の3つの指導法である。

- (I1) 楕円の定義にしたがって導入する指導法
- (I2) 図形 1 に関連付けて導入する指導法

- (I3) 図形 2 に関連付けて導入する指導法

本稿では、2節で3つの指導法の導入で用いられる図形は同じであることを示し、3節で3つの指導法を、4節で3つを指導法を比較・考察する。

2 3つの図形の方程式

この節では、3つの指導法の導入で用いられる図形は同じであることを示す。具体的には、3つの図形を、それぞれ、定数 a, b を用いて、うまく表現すると、それらの方程式がどれも同じになることを示す。具体的な表現は次の3つの定理に現れ、同じになることの証明は、定理の証明から得られる。本稿では定理の証明を省略する。

定理 2.1. 2点 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ を2つの焦点とする楕円の方程式は、 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ である。ただし、 $a(>c)$ は2つの焦点からの距離の和の $1/2$ 、 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ である。

定理 2.2. 円 $x^2 + y^2 = a^2$ を、 x 軸をもとにして y 軸方向に b/a 倍して得られる曲線の方程式は、 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ である。

定理 2.3. 座標平面上において、長さが $(a+b)$ の線分が端点 A は x 軸上、端点 B は y 軸上にあるように、動くとき、線分 AB を $a:b$ に内分する点 P の軌跡の方程式は $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ である。

3 3つの指導法

この節では、(I1)~(I3)の3つの指導法を示す。

- (II)楕円の定義にしたがって導入する指導法

この指導法は、以下の4つの段階で構成する。

(II.1) 円は1点(中心)から等距離にある点の集合だから、道具を使って、コンパスで円をかくように、図3のようにかけることを、実際に、板書して示す。

(II.2) この中心を2点に分けた場合を考えさせ、図4のように、中心を2つに分けて板書する。そして、これは、どんな図形かを考えさせ、楕円の定義である、2焦点からの距離の和が一定である点の軌跡であることを導く。

(II.3) 定理 2.1 を証明して、軌跡の方程式を求める。

(II.4) 図形 1 と図形 2 についても、応用として、定理 2.2、定理 2.3 を取り上げ、同じ方程式で表現できることを確認する。

- (I2)図形 1 に関連付けて導入する指導法

この指導法は、以下の5つの段階で構成する。

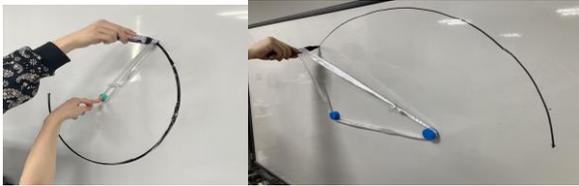


図 3:円の場合

図 4:中心を分けた場合

(I2.1) 素朴に「「楕円」とはどんな図形か」と投げかける。楕円の定義を答える生徒もいるだろうが、「円をつぶした図形」や「円を伸ばした図形」と答える生徒もいるだろう。

(I2.2) (I2.1)の後半の意見を整理して、図 1(円を一定方向に定数倍した図形)の方程式を定理 2.2 のように求める。必要に応じて、円のつぶし方・伸ばし方によっては素朴に楕円といえない図形を挙げて、それらとの比較から、図形 1 に誘導する。

(I2.3) (I2.1)の前者の意見があれば、それが楕円の定義だと紹介し、定理 2.1 のようにその方程式を求める。前者の意見がなくても、教師が定義を紹介して同様に求める。

(I2.4) (I2.2)と(I2.3)の結果が同じであることを確認し、素朴に考えた図形も、定義に基づいた図形も同じであり、定義の図形が楕円であることに違和感があっても、その図形は、素朴に考えた図形と同じであったことを伝える。

(I2.5) 図形 2 についても、応用として、定理 2.3 を取り上げ同じ方程式で表現できることを確認する。

(I3)図形 2 に関連付けて導入する指導法

この指導法は、以下の 5 つの段階で構成する。

(I3.1) 軌跡の問題として、「長さ4の線分 AB が、端点 A がx軸上、端点 B がy軸上になるように動くとき、線分 AB の中点の軌跡を求めよう」と投げかける。つまり、 $a = b = 4$ 場合の図形 2 を考えさせる。適宜、ヒントを出しながら、代表的な位置の線分 AB の中点をプロットさせる意見を引き出し、そのプロットした図を用いて、その図形が円であることを納得させる。

(I3.2) (I3.1)は P は中点であったが、その条件を少し変えて、1:3 に内分する点であったらどうなるか、同じように代表的な P をプロットさせて考えさせる。結果、円を変形させた図がかかれ、この図形の方程式を定理 2.3 のように求める。

(I3.3) 楕円の定義を紹介して、定理 2.1 の証明をして、その方程式を求める。

(I3.4) (I3.2)と(I3.3)の結果が同じであることを確認し、(I3.2)のように円の条件を弱めてできる図形も、定義に基づいた図形も同じであり、楕円が円の条件をうまく弱めてできることを伝える。

(I3.5) 図形 2 についても、応用として、定理 2.2 を取り上げ同じ方程式で表現できることを確認する。

4 3つの指導法の比較

この節では、(I1)から(I3)の指導法を、思考力を鍛える視点で比較・考察した結果を示す。3 つの指導法において鍛えられる思考力をまとめて、表 1 に示す。表 1 で挙げた思考力を 2 つの場面で比較・考察する。

第 1 の場面は最初の発問の場面である。どの指導法も、円を変形させた図形として、最初の図形を考えているが、

その図形の種類が異なる。3 種類の図形のうち、円からの表 1:3 つの指導法における思考力

(I1)	<ul style="list-style-type: none"> ・(I1.1)において、中心を 1 点から 2 点に分けているが、ここで、円をより一般化した図形を考察する思考力が用いられている。 ・(I1.3)において、等式の両辺を 2 乗すると現れる\sqrt{P}が減るように、$\sqrt{P} = Q$の形に移項しているが、ここに計算の工夫としての思考力が用いられている。 ・(I1.4)の確認において、図形 1 のような円を変形した図形でも、同じ方程式で表現できそうだと考察する思考力が用いられている。
(I2)	<ul style="list-style-type: none"> ・(I2.1)において、円を一定方向に定数倍した、より一般化した図形を考察する思考力が用いられる。 ・(I2.4)において、楕円の直観的な理解と数理的表現の関連付けをするときに思考力が用いられている。 ・(I2.5)において、数理的表現である方程式を通して、定義と関連付けができそうだと考察する思考力が用いられている。
(I3)	<ul style="list-style-type: none"> ・(I3.1), (I3.2)において、線分の中点から $a:b$ の比への一般化した図形を考察する思考力が用いられる。 ・(I3.1), (I3.2)において、図のイメージをしやすくするために代表的な点をプロットする。このプロットした図を利用するところに思考力が用いられている。 ・(I3.5)において、数理的表現である方程式を通して、定義と関連付けができそうだと考察する思考力が用いられている。

変形として最も自然なのは、(I2)の図形 1 であろう。したがって、最も思考しやすいと考える。さらに、自然な図形であるため、(定義に基づく)楕円や図形 2 との関連付けの思考もしやすいと考える。

第 2 の場面は、最初に扱う図形の方程式を求める活動の場面である。どの指導法にもこの活動が組み込まれている。その中で、(I3)の図形 2 は、図形をイメージすることが比較的難しく、代表的な点をプロットした図を用いるなどの思考力が必要である。一方、(I1)では計算過程に \sqrt{P} が現れなくなるように思考した結果の工夫がある。このように用いられている思考力を比較すると、(I3)が、他の 2 つの指導法よりも高度な思考力が必要と考える。

5 おわりに

本研究を通して、思考力を付ける指導法について理解が深まった。また、複数の指導法を列挙することで、他単元との関連付けがより深くなった。本研究を通して得た知識を用いて、思考力を鍛えることができる授業構想の手がかりとしていきたい。

参考文献

- [1] 岡部恒治ほか 17 名、『高等学校 数学Ⅲ』, 数研出版, 東京, 2014