関数の値域と曲線群の掃過領域に関する研究

2020SE098 今井智大
指導教員: 佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は, 関数の値域と曲線群の掃過領域についての理解を深めることである. この値域と掃過領域は[1]の第5章で述べており, 本研究も, その内容をもとに行う. 具体的には, [1]の第 5 章には記載されていない根拠や他の概念との関連付けを補いながらその理解を深める.

[1]の第 5 章は, 3 つの節
5.1 節 値域を求める原理
5.2 節 掃過領域を求める原理
5.3 節 図形への応用
から成る. まず, 5.1 節で関数の値域を求める問題を挙げて, それをもとに, 関数の値域を求める次の原理を紹介している. 次に, 5.2 節で曲線群の掃過領域を求める原理を, 関数の値域を求める問題と同じ形で示し, それを用いた 4 つの問題を紹介している. そして, 5.3 節では, その図形への応用として, 2 つの問題を紹介している.

以下の 2 節は, [1]の第 5 章の構成にそって, その内容を補った結果を示す. そこでは, [1]の問題をいくつか取り上げるが, 補った内容がわかるよう, 問題, 解, 解説の組で取り上げて, この解説の部分で補った内容を述べることにする. ただし, 解は, 概要のみを示したり, 省略したりする.

2　値域と掃過領域を求める問題

この節では, 上で述べた[1]の第 5 章の 3 つの節の内容を補った結果を, 以下の 3 つの各節で述べる.

2.1. 値域を求める原理

この節では, [1]の 5.1 節の内容を補った結果を示す. [1]では, 関数の値域を求める問題を挙げて, それをもとに, 関数の値域を求める次の原理を紹介している.

原理 2.1. 定義域Dにおける関数$y=f(x)$の値域をWとすると,

$$y \in W \Leftrightarrow \exists x \in D, y=f(x)$$

本研究では, この原理を説明するのに用いられている問題と解を次のように補った.

問題 2.1.1([1]). $x \in \mathbb{R}$のもとで, 関数$y=\frac{x+1}{x^2-2x+2}$の値域を調べよ.

解 1(概要). 導関数y'を求めたり, $x \to \pm\infty$のときの関数の様子を調べたりして, yの増減を増減表にまとめて, そこから解を導くことができる.

解 2(概要). 同値性

$$y=\frac{x+1}{x^2-2x+2} \Leftrightarrow yx^2-(2y+1)x+(2y-1)=0$$

が成り立つことから, 原理 2.1 の$y=f(x)$を上の右辺で置き換えた

$$y \in W \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, yx^2-(2y+1)x+(2y-1)=0$$

も成り立つ. この右辺を満たすy, つまり, その 2 次方程式の解が存在するようなyを求めればよい.

解説. 解 2 が[1]で述べられたものの概要で, 原理 2.1 を説明するための具体例としての役割があると考える. 解 1 は本研究で別解として追加したものである.

解 1 は, 関数の増減を調べ, 増減表にまとめることで, 目的の値域を求めている. この関数の増減を調べる過程において, 微分や極値を求める複雑な計算が必要であり, 正しく解を導くのは容易ではないと考える.

解 2 は, 原理 2.1 の同値性の右辺「yに対するxの値が定義域$\mathbb{R}$に存在する」を「方程式の解が存在する」ととらえて, 目的の値域を求めている. この過程では 2 次方程式の解が存在する条件を調べればよく, 複雑な計算を必要としない.

以上から, 解 1 より解 2 の方が, 解答を導きやすい解法と考える.

2.2. 掃過領域を求める原理

この節では, [1]の 5.2 節の内容を補った結果を示す. [1]では, 原理 2.1 をもとに曲線群の掃過領域(曲線の通過する範囲)を求める次の原理を紹介し, 問題とその解を示している.

原理 2.2. パラメータaの定義域がDであるとき, 曲線群$y=f(x,a)$の通過する領域をWとすると,

$$(x,y) \in W \Leftrightarrow \exists a \in D, y=f(x,a)$$

原理 2.3. パラメータaの定義域がDであるとき, 曲線群$g(x,y,a)=0$の通過する領域をWとすると,

$$(x,y) \in W \Leftrightarrow \exists a \in D, g(x,y,a)=0$$

上の 2 つの原理は, 原理 2.1 と同様に, 同値性の左辺が求めたい値域や掃過領域, 右辺が「(x,y)に対するaの値が定義域Dに存在する」の形をしているので, 基本的には, 原理 2.1 用いた前節の問題と同様に, 「(x,y)に対するaの値が定義域Dに存在する」を「方程式の解が存在する」ととらえて解くことができる. 原理 2.3 は, 原理 2.2 と比べ, この手法を用いやすい形をしている.

このことを踏まえ, 本研究では, [1]で紹介されている 4 つの問題と解を補った. 本稿ではそのうちの 3 題を示す. ただし, 一部の表現を変更している.

問題 2.2.1([1]). aが$1<a<2$の範囲の値をとるとき, xy

平面の直線$l_a: ax + y = a$の通り得る範囲を求めよ.
解説. 原理 2.2 を用いて解いた例である. [1]では, 問題 2.1.1と同様に, 原理2.2の同値性の右辺の「(x, y)に対するaの値が定義域Dに存在する」を「方程式の解が存在する」ととらえて, 1 次方程式の解の存在範囲の問題におきかえて解いている.

問題 2.2.2([1]). パラメータa, bが, 開区間$(0,1)$を動くとき, 直線

$$y = ax + a + b \tag{*1}$$

の通り得る範囲を図示せよ.
解説. この問題の図形の方程式(*1)は $y = \cdots$の形をしているが, 解では, $(x + 1)a + (b - y) = 0$, すなわち, $\cdots = 0$の形に変形して, 原理 2.3 の考え方を用いている. 具体的には, 原理 2.3 のaの代わりに, 2 つの変数a, bを用いた次の原理を用いている.

原理 2.4. パラメータa, bの定義域がD_1, D_2であるとき, 曲線群$g(x, y, a, b) = 0$の通過する領域をWとすると,

$$(x, y) \in W \Leftrightarrow \exists a \in D_1, (\exists b \in D_2, g(x, y, a, b) = 0)$$

この問題の解も, 上の原理の右辺を「方程式の解が存在する」という形にあてはめて考えている.

問題 2.2.3([1]). 実数kに対して, 次の曲線を考える.

$$C_k: x^2 + y^2 + 3kx + (k - 2)y - 6k - 4 = 0$$

(1)任意の実数kに対してC_kは円を表すことを証明し, kを動かしたときのC_kの円の中心の軌跡を求めよ.
(2)すべてのC_kが通る点があれば, それをすべて求めよ.
(3)どのC_kも通らない点があれば, それをすべて求めよ.
解説. (3)の解は, 原理 2.3 の考え方を用いている. しかし, 原理をそのまま用いるのではなく, 両辺の否定をとった次の原理を用いている.

原理 2.5. パラメータkの定義域がDであるとき, 曲線群$g(x, y, k) = 0$の通過する領域をWとすると,

$$(x, y) \notin W \Leftrightarrow \forall k \in D, g(x, y, k) \neq 0$$

証明.

左辺⇔「$\exists k \in D, g(x, y, k) = 0$」でない⇔右辺

また, 掃過領域という視点でみると, (3)は, この問題の曲線群の掃過領域の補集合を求めているので. 掃過領域は, (3)で求めた 2 点を除く座標平面ということになる.

すると, この掃過領域を求めるのに(1),(2)は不要であり, (1),(2)には別の役割があると考える. その役割は, k の変化に伴う円の変化を把握することと考える. (1)では円の中心の軌跡を求めているが, 半径の変化は求めておらず, 掃過領域を想像するのには情報が足りない. これに(2)の情報が加わると, 2 定点を通ることから各kに対する円の半径が決まり, 図 1 のような変化を把握できる. さらに. 図 1 において, 2 定点を通る直線付近の点が掃過領域に属するかどうかが, (3)によって, 直線上の点になければ属すことが明らかになる.

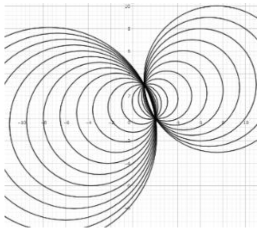

図 1: 問題 2.2.3 のC_k

2.3. 図形への応用

この節では, [1]の 5.3 節の内容を補った結果を示す. 2 つの問題があり, どちらも, 2.1 節と 2.2 節で紹介した原理を用いて解くが, 原理におけるパラメータaの範囲Dや曲線（群）の方程式が問題文に現れず, それらを問題文の条件から求める必要がある. この意味で, この 2 題は, これまでの原理の図形への応用(この節のタイトル)になっている.

問題 2.3.1([1]). AB を直径とする半円がある. 周上の弧 PQ を弦 PQ で折り返したとき, 折り返された弧が AB に接したとする. このような弦 PQ の存在する範囲を求めて図示せよ.
解説. この問題には, 曲線群（弦 PQ の群）の方程式も, その方程式に必要なパラメータも与えられていないため, まず, 必要なパラメータをその定義とともに導入し, そのパラメータを用いた等式で弦 PQ を表現する必要がある. その後, これまでと同様に原理 2.3 を用いて解くことができる.

問題 2.3.2([1]). xy平面に, 円$C: x^2 + y^2 = 1$と定点 A$(a, 0)$がある. ただし, aは 1 と異なる正の定数である. C上に点Pをとり, P を通り線分 AP に垂直な直線をlとする. P がC上を一周するときlが通過する範囲を不等式で表し, 図示せよ.
解説. この問題には, 定数aが現れるが, 求める掃過領域は, aにともなって曲線（直線l）が動いてできる領域ではない. つまり, 問題 2.3.1 と同様に, 問題文に, 曲線群（直線lの群）の方程式も, その方程式に必要なパラメータも与えられておらず, 問題 2.3.1 の解説で述べた手順が必要となる. ただし, [1]の解は, 問題 2.3.1 では 1 つのパラメータ, この問題は 2 つのパラメータを用いている.

3 おわりに

本研究を通して, パラメータを含む問題を解く際に適用できる原理について理解を深めることができた. また, パラメータを含む問題にはそれぞれ別解が存在するが, 原理を理解していれば同じ解法を用いて解くことができる. 本研究を通じて一般化することの重要性に気付くことができ, この考え方を今後にも活かしたいと思う.

参考文献

[1] 米谷達也, 数理哲人,『パラメータを視る 変数と図形表現』, 現代数学社, 京都, 2022