

# ニムにもとづいた組合せゲームの必勝法

2018SE001 浅田 莉伯

指導教員：佐々木 克巳

## 1 はじめに

本研究の目的は、ニムにもとづいた組合せゲームの必勝法を、[1-4]を参考に、深く理解することである。ここで、ニムは基本的な組合せゲームとして知られているゲームで、石の積まれた山から2人の各プレイヤーが、1個以上の任意の数の石を取り除く操作を交代で続けて、石が取れなくなったプレイヤーが敗北するゲームである。本研究で扱う組合せゲームも、ニムと同様に、2人のプレイヤーが交互に手を指し、指す手がなくなった局面(最終局面という)で自分の番となるプレイヤーが敗北するというルールをもつ。

本研究は、このルールをもつ組合せゲーム、とくに上のニムを用いた3種類のゲーム(2山以上のニム, 制限ニム, 制限ニムの和のゲーム)の必勝法を深く理解する。より具体的には、必勝法の存在がグランディ数の符号で判定できることの証明を記述したり、具体的な組合せゲームの必勝法を記述した上で、それを履行した例を示したりする。本研究では、そこで紹介される性質や定理の証明を、数学的帰納法を用いるなどで丁寧に記述したが、本稿では、その記述を省略している。

本稿では、2節でグランディ数とニム和について述べ、3節でニムを用いた組み合わせゲームについて述べる。

## 2 グランディ数とニム和

この節では、必勝法の存在判定に必要なグランディ数とニム和を、[1]にしたがって述べる。以後、ゲームの局面  $P$  に対し、 $P$  で番の回ってきたプレイヤーが手を指した直後の局面を、 $P$  の次局面という。 $P$  の次局面を全部集めた集合を  $n(P)$  と表す。まず、グランディ数を定義する。

定義 2.1([1]). 局面  $P$  におけるグランディ数  $G(P)$  を次のように定義する。

- (1)  $P$  が最終局面のとき  $G(P)=0$
  - (2)  $P$  が最終局面でないとき  $G(P)=\text{mex}\{G(P') \mid P' \in n(P)\}$
- ここで  $\text{mex}$  とは、最小除外数(minimum exclusion)と呼ばれるもので、整数の集合  $T$  に対して定義される以下の集合である。

$$\text{mex}(T)=\min\{k \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, k \notin T\}$$

このグランディ数  $G(P)$  を用いると、ゲームの各局面  $P$  における必勝法を持つプレイヤーを判定できる。その定理が次の定理 2.2 になる。

定理 2.2. 局面  $P$  において、

- (1)  $G(P)=0 \Leftrightarrow G(P')=0$  となる  $P' \in n(P)$  は存在しない
- (2)  $G(P)>0 \Leftrightarrow P$  で自分の番となるプレイヤーに必勝法が存在する

性質 2.2 から必勝法の存在を判定できるが、必勝法が存在するときは、その具体的な方法も知ることができる。

$G(P)>0$  のとき、 $P$  で自分の番となるプレイヤーは、(1) から  $G(P')=0$  となる  $P'$  が次局面になるよう手を指すことができ、さらに(1)より、相手プレイヤーはどのように手を指しても、その次局面  $P''$  は  $G(P'')>0$  を満たすことになる。したがって、 $G(P)>0$  で自分の番となるプレイヤーは、相手プレイヤーが敗北するまで、次局面  $P'$  が  $G(P')=0$  を満たすような手を指し続けることができ、それが具体的な必勝法となる。

次にニム和と和のゲームを定義する。

定義 2.3. 非負整数  $a, b$  に対して、次を満たす  $N$  を  $a$  と  $b$  のニム和といい  $a \oplus b$  と表す。

$$\text{dig}(N, i) = \text{dig}(a, i) \oplus \text{dig}(b, i)$$

ただし、

・非負整数  $n$  と正の整数  $k$  に対して、 $\text{dig}(n, k)$  は、 $n$  の2進数表記の第  $k$  桁を表す。

・ $d, d' \in \{0, 1\}$  に対し、 $d \oplus d' = (d + d') \bmod 2$  である。

定義 2.4. 2つ以上のゲーム  $g_1, g_2, \dots, g_n$  に対し、次の2条件で定まるゲーム  $g$  を  $g_1, g_2, \dots, g_n$  の和のゲームという。

(1)  $g$  の局面は、各  $g_k$  の局面  $P_k$  の組  $(P_1, \dots, P_n)$  であり  $g$  の最初の局面は各  $g_k$  の最初の局面の組、 $g$  の終了局面は各  $g_k$  の終了局面の組である。

(2)  $g$  の局面  $P$  が、各  $g_k$  の局面  $P_k$  を用いて、 $P=(P_1, \dots, P_n)$  と表されるとき  $P$  における  $g$  の1手は「 $g_1, \dots, g_n$  から1つのゲーム  $g_k$  を選び、 $P_k$  における  $g_k$  の1手を指す」ことである。

和のゲームの勝敗判定も、定理 2.2 を用いれば、グランディ数によって判定できる。そこで、和のゲームの各局面のグランディ数を求める方法は以下のとおりである。

定理 2.5. 2個のゲーム  $g_1, g_2$  の和のゲームを  $g$  とし、 $g_1, g_2$  の任意の局面  $P$  に対して、ある非負整数  $k$  が存在して

$$\{G(P') \mid P' \in n(P)\} = \{0, 1, \dots, k-1\}$$

を満たすとす。  $g$  の局面  $P$  が各  $g_k$  の局面を  $P_k$  を用いて  $P=(P_1, P_2)$  と表されるとき、次が成り立つ。

$$G(P) = G(P_1) \oplus G(P_2)$$

## 3 ニム

この節では、ニムを用いた組み合わせゲームである、2山以上のニム, 制限ニム, 制限ニムの和のゲームとその必勝法について述べる。3.1節で2山以上のニム、3.2節で制限ニムとその和のゲームの必勝法について述べ例を挙げる。ただし、図 3.1, 図 3.2, 図 3.3, 図 3.4 において、「 $\Rightarrow$ 」が先手の手、「 $\rightarrow$ 」が後手の手である。

### 3.1 2山以上のニム

この節では、2つ以上のニムの和のゲームである2山以上のニムの必勝法について述べる。初めにニムのグランディ数は以下ようになる。

性質 3.1. 局面  $n$  に対して、

- (1)  $G(n)=n$
- (2)  $\{G(P')|P' \in n(P)\}=\{0,1,\dots,n-1\}$

このゲームの必勝法も 2 節に述べたことを用いて、次のように求めることができる。以後、山の数は  $k$  個とする。

性質 3.2. 第  $i$  山の石の数を  $N_i$  とおき、局面  $P=(N_1,\dots,N_k)$  を考える。このとき、

- (1)  $G(P)=N_1 \oplus \dots \oplus N_k$
- (2)  $N_1 \oplus \dots \oplus N_k > 0 \Leftrightarrow P$  で自分の番となるプレイヤーに必勝法が存在する。

その必勝法の例は、定理 2.2, 性質 3.2 より次の例 3.3 のようになる。

例 3.3. 2 山以上のニムの必勝法は、次のようになる。

(1) 開始局面のグランディ数が 0 とき、後手に必勝法が存在し、その必勝法は「グランディ数が 0 になるように石を取り除き盤面を返す」であり、例として、石の数が (14,11,5) のとき、図 3.1 のように、先手の手に応じて後手が手を打てば、後手の勝利となる。

$$(14,11,5) \Rightarrow (8,11,5) \rightarrow (8,11,3) \Rightarrow (2,11,3) \rightarrow (2,1,3) \Rightarrow (2,1,0) \rightarrow (1,1,0) \Rightarrow (1,0,0) \rightarrow (0,0,0)$$

図 3.1. 例 3.3(1)の履行例

(2) 開始局面のグランディ数が正のとき、先手に必勝法が存在し、その必勝法は「グランディ数が 0 になるように石を取り除き盤面を返す」であり、例として、石の数が (9,8,5) のとき、図 3.2 のように、後手の手に応じて先手が手を打てば、先手の勝利となる。

$$(9,8,5) \Rightarrow (9,8,1) \rightarrow (4,8,1) \Rightarrow (4,5,1) \rightarrow (4,3,0) \Rightarrow (3,3,0) \rightarrow (0,3,0) \Rightarrow (0,0,0)$$

図 3.2. 例 3.3(2) の履行例

### 3.2 制限ニム

この節では、ニムから取れる石の数を制限した制限ニムとその和のゲームの必勝法について述べる。

性質 3.4. ニムで、取れる石の数を 1 個以上  $k$  個以下に制限した制限ニムにおいて、次が成り立つ。

- (1)  $G(n)=n \bmod (k+1)$
- (2)  $\{G(P')|P' \in n(P)\} = \begin{cases} \{0,1,\dots,n-1\} & (n \leq k) \\ \{0,1,\dots,k-1\} & (k < n) \end{cases}$

制限ニムの和のゲームの必勝法も、3.1 節と同様に示すことができる。ここでは 2 つの制限ニムの和のゲームの必勝法を以下の系に示す。

系 3.5. 取れる石の数を、それぞれ、 $i, j$  に制限した制限ニム  $g_1, g_2$  の和のゲームを  $g$  とする。  $g_1$  の局面  $m$  と  $g_2$  の局面  $n$  によって定まる  $g$  の局面を  $P$  とする。このとき、

$$(m \bmod (i+1)) \oplus (n \bmod (j+1)) > 0 \\ \Leftrightarrow P \text{ で自分番となるプレイヤーに必勝法が存在する}$$

その必勝法の例は、3.1 節と同様に次の例 3.6 のようになる。

例 3.6. 第 1 山の石の数  $m$  と第 2 の石の山の数  $n$ , 第 1 山から取れる石の数が  $i$  個以下、第 2 山から取れる石の数が  $j$  個以下の 2 山の制限ニムの必勝法は、次のようになる。

(1)  $(m \bmod (i+1)) \oplus (n \bmod (j+1)) = 0$  のとき、後手に必勝法が存在し、その必勝法は「 $(m \bmod (i+1)) \oplus (n \bmod (j+1)) = 0$  になるように石を取り除き盤面を返す」であり、例として、石の数が第 1 山 8, 第 2 山 7 で取れる石の数が第 1 山 4, 第 2 山 3 のとき、図 3.3 のように、先手の手に応じて後手が手を打てば、後手の勝利となる。

$$(8,7) \Rightarrow (5,7) \rightarrow (5,4) \Rightarrow (3,4) \rightarrow (3,3) \Rightarrow (0,3) \rightarrow (0,0)$$

図 3.3. 例 3.6(1)の履行例

(2)  $(m \bmod (i+1)) \oplus (n \bmod (j+1)) > 0$  のとき、先手に必勝法が存在し、その必勝法は「 $(m \bmod (i+1)) \oplus (n \bmod (j+1)) = 0$  になるように石を取り除き盤面を返す」であり、例として、石の数が第 1 山 10, 第 2 山 6 で取れる石の数が第 1 山 3, 第 2 山 2 のとき、図 3.4 のように、後手の手に応じて先手が手を打てば、先手の勝利となる。

$$(10,6) \Rightarrow (8,6) \rightarrow (6,6) \Rightarrow (6,5) \rightarrow (6,3) \Rightarrow (4,3) \rightarrow (1,3) \Rightarrow (1,1) \rightarrow (1,0) \Rightarrow (0,0)$$

図 3.4. 例 3.6(2)の履行例

## 4 おわりに

本研究では、ニムを用いた組合せゲームの必勝法を、深く理解するために、研究を行った。その結果、グランディ数の符号によって必勝法の存在を確認することの正当性を認めることができ、その必勝法もグランディ数から得られることについて証明を行い正当性が認められた。

### 参考文献

- [1] 佐藤文広, 「3 山くずし」, 数学セミナー, 日本評論社, 48(4), 東京, 2009, pp. 70-75
- [2] 佐藤文広, 「ゲームの和とニム和」, 数学セミナー, 日本評論社, 48(6), 東京, 2009, pp. 66-71
- [3] 佐藤文広, 「ニム変奏曲」, 数学セミナー, 日本評論社, 48(7), 東京, 2009, pp. 76-80
- [4] 徳田雄洋, 『必勝法の数学』, 岩波書店, 東京, 2017