

中国の農業大学の数学

—微積分の応用を中心に—

2020SS085 XIA XUAN

指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

現在、日本の大学で行われている微積分学の教育は、理論的な知識を教えることに重点を置き、実際的な応用を軽視しているように思われる。中国には、中国農業大学（北京）をはじめとし、東北農業大学（ハルビン）、華中農業大学（武漢）、四川農業大学（成都）、華南農業大学（広州）など、多くの農業大学があり、数学に関しても独自の教育や研究が行われている。ここでは、中国の農業大学の教員の著作から、微積分の農業への応用を取り上げて紹介する。このようにして、日本の大学教育においても理論と実践を組み合わせることにもっと重点を置くように呼びかけたい。

2 農業における微積分の応用

農学では、微積分を使い、栽培する作物の最適密度、施肥量と収穫量の関係、葉緑素の量、果実の体積などを計算することができる。

2.1 作物の収量が最大になる栽植密度

農業生産では、作物の**栽植密度** (plant density), すなわち単位面積当たりの植え付け株数を考えることが重要である。植物の全重量から水分の重さを除いたものを乾物重といい、全乾物重を、**生物学的収量** (biological yield), 人が利用する部分の乾物重を**経済学的収量** (economical yield) という。また、(経済学的収量)/(生物学的収量)の割合を**収穫指数** (harvest index) という。

例えば、トウモロコシの場合、生物学的収量 B と収穫係数 E , 栽植密度 x にはそれぞれ次のような関係があるとする [1].

$$B = \frac{x}{a + bx}, E = (a\alpha + \beta) + \alpha bx \quad (1)$$

ここで、 a, b, α, β は定数であり、 $\alpha < 0$ である。後者は、栽植密度を増やすと、養分が十分に行きわたらないなどの理由から、1株当たりの種子(可食部分)の収穫量が減ることに対応すると考えられる。文献 [1] では、文字のまま、計算が進められているが、分かりにくいので、 $a = 2, b = 1, \alpha = -10, \beta = 140$ の場合を考える。 B と E は $B = x/(2 + x)$, $E = 120 - 10x$ となり、経済学的収量 W は

$$W = BE = (120x - 10x^2) \frac{1}{2 + x} \quad (2)$$

と表される。 W が極大値をとるための必要十分条件は

$$\frac{dW}{dx} = 0, \frac{d^2W}{dx^2} < 0 \quad (3)$$

であり、式 (2) を微分すると、

$$\frac{dW}{dx} = \frac{-10x^2 - 40x + 240}{(2 + x)^2} \quad (4)$$

となることから、トウモロコシの収量が最大になる栽植密度は

$$x = 3.3 \quad (5)$$

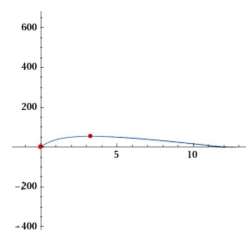


図1 Wの曲線

2.2 経済的な施肥量の計算

1909年、ドイツの農学者 Mitscherlich (1874-1956) は、多種にわたる施肥量と作物収量との関係を表す式を提案した。肥料の使用量と作物収量との関係は次のような式で表される [1].

$$\frac{dy}{dx} = C(A - y) \quad (6)$$

作物収量を y , 施肥量を x , 最大収量を A としている。 A と C は、外部の成長環境によって決まる定数である。微分方程式 (6) を積分すると

$$\log(A - y) = -Cx + \log C_1 \quad (C_1 \text{ は定数}) \quad (7)$$

となり、初期条件を $x = 0, y = 0$ とすると $C_1 = A$ となり、(6) の解は次のように表される。

$$y = A(1 - e^{-cx}) \quad (8)$$

このモデルを使って現在の条件下で特定の品種から得られる収量と必要な肥料の使用量を推測することができる。

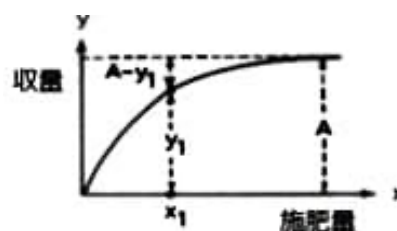


図2 Mitscherlich 曲線

図2は,(8)の関数のグラフを描いたもので,農学分野では,Mitscherlich 曲線と呼ばれている.この図から分かるように,施肥量を増やすと収量は増えるが,その増加率は減少関数である.Mitscherlich 曲線は,ミクロ経済学の**限界生産力逓減の法則**(生産要素による生産物の増加の割合は生産要素が増加するにつれて減少する)の農業生産における実例を表したものと考えられる.文献[1]では,単位肥料あたりの作物収量 B を与えたときの施肥量 x を

$$\frac{dy}{dx} = Ace^{-cx} \quad (9)$$

は減少関数である.Mitscherlich 曲線は,ミクロ経済学の**限界生産力逓減の法則**(生産要素による生産物の増加の割合は生産要素が増加するにつれて減少する)の農業生産における実例を表したものと考えられる.文献[1]では,単位肥料あたりの作物収量 B を与えたときの施肥量 x を

$$\begin{aligned} \frac{d[A(1 - e^{-cx})]}{dx} &= B \\ ACE^{-cx} &= B, \quad Cx = \log \frac{AC}{B} \\ x &= \frac{1}{C} \log \frac{AC}{B} \end{aligned} \quad (10)$$

のように導いている.

2.3 重積分による葉緑素の量の計算

葉緑素は,光合成で主要な役割を果たす.葉が xy 平面内の閉領域 D であると仮定し, D 内の点 (x,y) での葉緑素の密度が関数(光合成関数と呼ばれる) $f(x,y) \geq 0$ で与えられるとすると,葉全体の葉緑素量は二重積分を用いて

$$I = \iint_D f(x,y) dx dy \quad (11)$$

と表される[2].葉の葉緑素量は植物の光合成量を求める際に基本となる.

具体的な例を以下に示す.葉の囲まれた領域 D は左右対称で,右半分の領域 D_1 は曲線 $r = 2\theta (0 \leq \theta \leq \pi/2)$ と y 軸とで囲まれているとする.また,計算を簡単にするため,光合成関数を

$$f(x,y) = \frac{2}{x^2 + y^2 + 3\pi^2} \quad (12)$$

と仮定する[2].図3の青い曲線は,光合成関数式(12)の等高線である.葉の付け根のほうが,葉緑素が多く,先端に行くほど少なくなるということである.

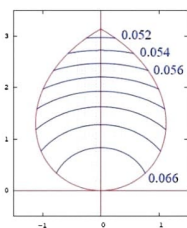


図3 葉のモデル化

極座標を用いることにより,領域 D 上の葉緑素の量 I を

次のように計算することができる.

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x,y) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_1} \frac{2}{x^2 + y^2 + 3\pi^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\theta} \frac{2r}{r^2 + 3\pi^2} dr \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} [\log(4\theta^2 + 3\pi^2) - \log(3\pi^2)] d\theta \\ &= 2\pi \log \frac{2}{3} - \pi + \frac{\sqrt{3}}{6} \pi^2 \end{aligned} \quad (13)$$

さらに,[2]では,樹木の**樹冠**(crown)の体積の計算に重積分を用いている.

まず,樹冠は上下の立体の差と考えることができ,下は円錐,上は回転体である.次に,二重積分を用いて樹冠の体積を求める.そのために適切な座標系を確立する.

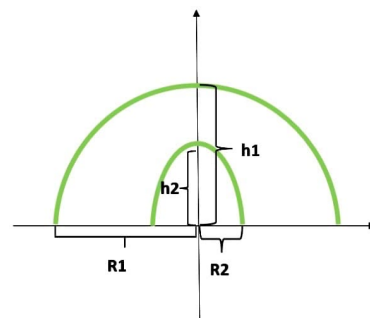


図4 樹冠の概略図

回転放物面の方程式は $z_1(x,y) = h_1 - \frac{h_1}{R_1^2}(x^2 + y^2)$ で,円錐面の方程式は $z_2(x,y) = h_2 - \frac{h_2}{R_2^2}\sqrt{x^2 + y^2}$ である.領域 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$,したがって,樹冠の体積は $V = \iint_{D_1} z_1(x,y) dx dy - \iint_{D_2} z_2(x,y) dx dy$.

最後に,極座標変換を使えば,樹冠の体積を計算することができ,さらに樹木全体の光合成量を計算することができる.

3 おわりに

以上の例は,微積分が農業科学の問題を研究する手段であり,農業生産に不可欠な役割を果たしていることを示している.将来の学習と生活において,私たちは実生活における微積分の応用に注意を払うことにより,数学が実生活で最大の役割を果たせるようにできると思われる.

参考文献

- [1] 陈付贵,张万琴:『微积分理论在建立农业数学模型中的应用(微積分の農業の数学モデル構築における応用)』.吉林农业大学学报,19(1997),158-161.
- [2] 肖羽,刘其佳,何春花,侯贤敏:『二重積分在农业中的应用(二重積分の農業における応用)』.教育教学论坛,第29期(2020),215-216.