

大学初年級教育へのスティルチェス積分の導入の試み

2020SS060 大杉有貴瞳

指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

2022年度から実施されている高等学校の学習指導要領 [1] では、それまで「数学B」の「確率分布と統計的な推測」に含まれていた期待値が「数学A」の「場合の数と確率」に移されている。大学入試では、「確率分布と統計的な推測」を必須にしている大学がほとんどなかったためこの単元は扱われないことが多かった。しかし、2022年度からは、ほとんどの高校生が期待値を学習するようになった。このことから、統計教育が重要視されるようになったと考え、大学においても同様に統計教育を強化していくことが大切であると考え。

また、大学の統計教育にスティルチェス積分をより積極的に活用することが提唱されている [2]。スティルチェス積分を用いることで、離散的な分布と連続的な分布の期待値を統一的に扱うことができるためである。この「統一的な扱い」に着目して、期待値の新たな説明を試みる。

2 スティルチェス積分による期待値の定義

X を確率変数、 X の分布関数を $F_X(x)$ 、すなわち $F_X(x) = P(X \leq x)$ とする。このとき、確率変数 $g(X)$ の期待値を $E\{g(X)\}$ と書き、

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x) \quad (1)$$

のようにスティルチェス積分を用いて定義することがある ([3], p.57)。期待値をこのように定義すると、離散的な分布と連続的な分布を統一的に扱うことができるが、ルベグ積分の考え方に基づくスティルチェス積分 (ルベグ-スティルチェス積分) は、必ずしも理解が容易ではない。ここでは、大学初年級の学生も学ぶリーマン積分 (例えば, [4], p. 57) に基づくスティルチェス積分 (リーマン-スティルチェス積分) の定義を述べる。

$F(x)$ を区間 $[a, b]$ 上の非減少関数、 $g(x)$ を区間 $[a, b]$ 上の有界な関数 (被積分関数) とする。区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

に対して、 $d(\Delta) = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$ とおく。各区間 $[x_{j-1}, x_j]$ に含まれる点 z_j を代表点とし、

$$\sigma(F, \Delta, \{z_j\}) = \sum_{j=1}^n g(z_j) (F(x_j) - F(x_{j-1})) \quad (2)$$

をリーマン-スティルチェス和と呼ぶ。この和が、 $d(\Delta) \rightarrow 0$ のとき、分割にも代表点のとり方にもよらない一定値に近づくならば、 $g(x)$ は $[a, b]$ 上スティルチェス可能であるという。さらに、極限値のことを $g(x)$ の $[a, b]$ 上でのスティルチェス積分と呼び、

$$\int_a^b g(x) dF(x)$$

と表す。リーマン積分と同様、 $g(x)$ が $[a, b]$ 上の連続関数ならば積分可能となる ([5], p.356)。

$F(x) = x$ のとき、スティルチェス積分が通常のリーマン積分になる。また、 $-\infty$ から ∞ までの積分は、通常のリーマン積分と同様に広義積分で定義する。 $g(x) \equiv 1$ のときは定義から直接積分が求められ、 $\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)$ となる。特に、関数 $F(x)$ が確率変数 X の分布関数であるとき、 $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = 0$ 、 $\lim_{b \rightarrow \infty} F_X(b) = 1$ となることから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1 \quad (3)$$

が成り立つ。

さらに、 $F(x)$ が確率変数 X の分布関数であるとき、(2) は

$$\sum_{j=1}^n g(z_j) P(x_{j-1} < X \leq x_j) \quad (4)$$

と書き直される。標本値 $g(z_j)$ と対応する確率との積の和になっていることから、対応するスティルチェス積分を期待値と呼び、(1) のように表す。以下、この定義に基づいて、「数学B」に現れる期待値の基本的な性質を示す。

3 スティルチェス積分の性質

$F(x)$ が区間 (a, b) で微分可能なとき、すなわち、導関数 $F'(x) = f(x)$ ($a < x < b$) が存在するとき、確率分布 $F_X(x)$ が密度関数 $f_X(x)$ をもつ場合は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (5)$$

と表される。

また、確率変数 X が

X	x_1	x_2	\cdots	x_n	計
P	p_1	p_2	\cdots	p_n	1

の確率分布に従うとき、 a, b を、 $a < x_r < b$ ($1 \leq r \leq n$) であるようにとると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x) &= \int_a^b g(x) dF_X(x) \\ &= g(x_1) p_1 + \cdots + g(x_n) p_n \end{aligned} \quad (6)$$

と表される。

X を確率変数とし、定数 $\alpha > 0$ と β を用いて、確率変数 Y を $Y = \alpha X + \beta$ で定めると、連続関数 $g(y)$ に關して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha x + \beta) dF_X(x) \quad (7)$$

が成り立つ。

確率変数 X の平均 μ , 分散 σ^2 ($\sigma > 0$) は

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) \quad (8)$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 dF_X(x) \quad (9)$$

で与えられる。公式 (7) を用いると, $Y = \alpha X + \beta$ ($\alpha > 0$, β は定数) について,

$$E(Y) = \alpha\mu + \beta, \quad V(Y) = \alpha^2 \sigma^2 \quad (10)$$

が成り立つ。

4 スティルチェス重積分

$F(x, y)$ を長方形領域 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上定義された関数であって, 次の条件 (C) を満たすものとする。

(C) $a \leq x_S \leq x_L \leq b, c \leq y_S \leq y_L \leq d$ を満たす任意の x_S, x_L, y_S, y_L に対して,

$$F(x_L, y_L) - F(x_S, y_L) - F(x_L, y_S) + F(x_S, y_S) \geq 0 \quad (11)$$

が成り立つ。

I の分割

$$\Delta : \begin{cases} a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d \end{cases}$$

に対して, $d(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}\}$ とおき, 小領域 $I_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ に対して, $\Delta F(x_i, y_j)$ を

$$\Delta F(x_i, y_j) = F(x_i, y_j) - F(x_{i-1}, y_j) - F(x_i, y_{j-1}) + F(x_{i-1}, y_{j-1}) \quad (12)$$

により定める。

$g(x, y)$ を I 上の有界な関数とする。小領域 $I_{i,j}$ に含まれる点 (z_i, w_j) を代表点とし,

$$\sigma(F, \Delta, \{(z_i, w_j)\}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(z_i, w_j) \Delta F(x_i, y_j) \quad (13)$$

の和が, $d(\Delta) \rightarrow 0$ のとき, 分割 Δ にも代表点 (z_i, w_j) のとり方にもよらない一定値に収束するならば, $g(x, y)$ はスティルチェス積分可能であるという。極限値のことを $g(x, y)$ の I 上でのスティルチェス重積分と呼び,

$$\int_c^d \int_a^b g(x, y) dF(x, y)$$

と表す。1変数の場合と同様, $g(x, y)$ が I 上連続ならば積分可能となる。

$F(x, y) = xy$ であるとき, スティルチェス重積分は通常の重積分となる。また, $F(x, y), g(x, y)$ が xy 平面全体で

定義されているとき, 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dF(x, y)$

を, $\int_c^d \int_a^b g(x, y) dF(x, y)$ の $c \rightarrow -\infty, d \rightarrow \infty, a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$ の極限で定義する。

関数 $F(x, y)$ が確率変数 X, Y の同時分布関数 $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ である場合,

$$\Delta F(x_i, y_j) = P(x_{i-1} < X \leq x_i, y_{j-1} < Y \leq y_j)$$

と書き直されることから, 対応する広義スティルチェス積分を期待値と呼び,

$$E\{g(X, Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dF(x, y) \quad (14)$$

のように表す。確率変数 X, Y が独立であるとき, 同時分布関数は

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad (15)$$

と表される。このことから, 独立な確率変数 X, Y の平均について,

$$E(XY) = E(X) E(Y) \quad (16)$$

が示され, さらに, 分散に関する基本的な関係式

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \quad (17)$$

が示される。

5 おわりに

スティルチェス積分の定義に基づいて, 期待値の性質を明らかにした。

2022年度より前に「数学A」を学習した生徒は, 期待値など統計学の基礎となる知識が少ないまま大学に入学することになるため, 基礎的な部分から説明や演習を行う必要があり, スティルチェス積分を用いた期待値を導入することは難易度が高い。しかし, 高校で, 期待値を学習したことのある学生であれば, スティルチェス積分による期待値を導入することは可能であると考え。

大学初年級から発展的な統計教育を行い強化していくことで, 学びをさらに社会で活用できるようにしていきたい。

参考文献

- [1] 文部科学省：『【数学編 理数編】高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説』。2018。
- [2] F. Kachapova: "A General Approach to Teaching Random Variables", Mathematics Teaching-Research Journal Online, Vol. 5 (2021), No. 2, pp. 1-16.
- [3] 白石高章：『統計学の基礎－データと確率の結びつきがよくわかる数理』。日本評論社, 東京, 2012。
- [4] 小藤俊幸：『考える力をつけるための微積分教科書』。学術図書出版, 東京, 2019。
- [5] 杉浦光夫：『解析入門』。東京大学出版会, 東京, 1980。