

音律と和音についての数理的考察

2020SS052 丹羽桃子

指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

音楽には、リズム、メロディー、ハーモニーの3要素がある。これらのうち多くの楽器が音を合わせる際、演奏中に適宜調整が必要とされる要素がある。それがハーモニーである。音楽では、主旋律を演奏する際と、伴奏など複数を重ねる必要がある際には、音の響かせ方に違いを出すべきだと考えられている。これを特に感じることでできる場面が吹奏楽やオーケストラである。実際、3音の和音を構成する際に「真ん中の音はピッチ（音の高さ）を基準より少し低く、一番上の音は少し高く」と言われる。その方がきれいな音の重なりになるという。しかし、実際のところ自分なりに調整をした上でも、耳で聞いただけでは限界があると感じた経験がある。そこで、本研究では音の周波数を利用することで、グラフや数値で可視化し、数学的にどの程度の違いがあるのかを明らかにする。

2 音律

今回用いる音律の性質について文献 [2], [3] を参考に概要を説明する。一般的な音律としてピアノの調律などで使われる平均律がある。これは1オクターブを12等分してそれぞれの音の周波数を決めたものである。例えば、真ん中のドを1とし、1オクターブ上のドを2としたとき、その間のレ、ミ、...、シは $2^{2/12}$, $2^{4/12}$, ..., $2^{11/12}$ となる。これにより隣同士の音の周波数の差が均等になっているため主旋律のような一つの音が連なるフレーズはきれいに聞こえるのである。しかし、和音など2つ以上の音が重なるときはうなりが生まれ、きれいには聞こえない仕様になってしまう短所も存在する。

純正律は主にオーケストラや吹奏楽部で使われる。これは、倍音という周波数の倍数を利用した音を利用して、和音の響きの美しさを最重要視して作られたものである。具体的には、真ん中のドを基準音とし1と考えたとき、周波数が2倍になるとオクターブのド、3倍になるとオクターブと完全5度のソ、4倍になるとオクターブのさらにオクターブで基準音からは2オクターブとなる。完全5度であるドからソの周波数比が2:3、長3度であるドからミの周波数比が4:5となるように設定された音律なのだが、特定の和音の響きに特化した音律であるがゆえに、移調が難しく、メロディーラインをこの音律で奏でると違和感を感じる人も現れるだろう。しかし、吹奏楽やオーケストラなどでは個々がピッチ調整をできるため、和音をきれいに聞かせたい際は純正律を利用している。

3 協和音から見る和音の重なり

実際に和音を聞いた際に、なぜきれいな響きとそうでない響きが生まれるのかを数学的な観点から考えてみた。ここで、協和音とされている「ド・ミ・ソ」で構成されるCマイナーの和音の周波数の比を平均律・純正律・ピタゴラス音律について調べた。そのうち平均律と純正律について表1に示す。

表1 Cマイナーの周波数の比

| | ド(f_0) | ミ \flat (f_3) | ソ(f_5) |
|-----|------------|---------------------|---------------------|
| 平均律 | 1 | $\frac{3}{2^{1/2}}$ | $\frac{7}{2^{1/2}}$ |
| 純正律 | 1 | $\frac{6}{5}$ | $\frac{3}{2}$ |

純正律では、数値がすべて簡単な整数比にできる。ここで純正律の性質を加味すると、周波数が簡単な整数比にできる和音はきれいに響くと考えられる。これをもとに、平均律について考えてみたところ、ド以外は無理数であり、整数比にはできない。ここに平均律の和音がきれいに響かない原因が現れていると推定ができた。

ここで、和音の重なりを視覚的に検証をできないか検討し、文献 [1] を参考に、振動の周波数や位相の関係を可視化する方法であるリサージュ図形を用いることにした。この図形は、振動数比が整数比である場合は曲線が閉じ、そうでない場合は空間や平面を埋め尽くす曲線が描かれる。本研究では、三重音のため三次元リサージュ図形と二次元リサージュ図形の両方を扱うことにする。Cマイナーの和音をそれぞれの音律について関数にし、リサージュ図形にしたものを示す。それぞれの音律について、ド・ミ・ソの周波数をこの順で f_0, f_3, f_5 とし3つの波形を表す。波形を表すのに利用した関数は次のとおりである。ただし、 $0 \leq t \leq 50$, $A = 2.0$ とする。

$$\begin{cases} x = A \sin(2\pi f_0 t) \\ y = A \sin(2\pi f_3 t) \\ z = A \sin(2\pi f_5 t) \end{cases} \quad (1)$$

まず、平均律は図1のようになった。前述したとおり、平均律の和音は周波数の比が有理数にならないため、閉曲線にならず波形が空間を埋めるように描かれた。

次に、図2に純正律のリサージュ図形を示す。平均律と異なり、とてもすっきりした図形を得ることができた。純正律の波形は t がどんな値であっても、 x, y, z 振動数の比がすべて4:5:6になっているため、波形が重なり、閉曲線になることがわかった。この図形は、「純正律は和音が最もきれいに響くように設定された音律である」という

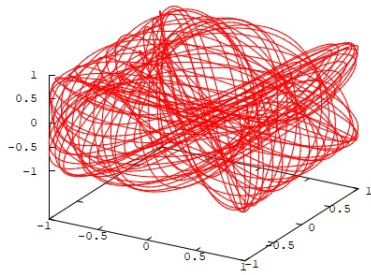


図 1 平均律

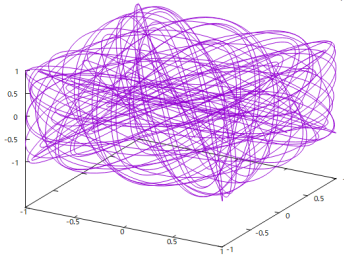


図 3 平均律

ことを数学的に説明するにあたって非常に有効な結果であると考えられる。

で響くことが難しく、不協和音であるということが言えるようだ。

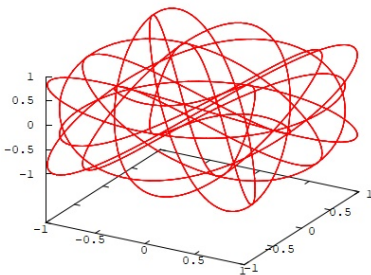


図 2 純正律

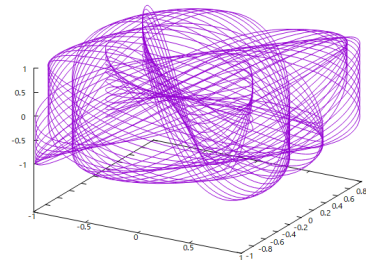


図 4 純正律

4 不協和音からみる和音の重なり

ここで、不協和音についても数学的観点から考えてみようと思う。Cマイナーとは違い、ソの音を半音下げた「ド・ミ・ソ」で構成されるCディミニッシュの和音の周波数の比について同様のことを行った。平均律・純正律のそれぞれについて表2に示す。

表2 Cディミニッシュの周波数の比

| | ド(f_0) | ミ \flat (f_3) | ソ \flat (f_5) |
|-----|------------|---------------------|---------------------|
| 平均律 | 1 | $\frac{3}{2^{12}}$ | $\frac{6}{2^{12}}$ |
| 純正律 | 1 | $\frac{6}{5}$ | $\frac{45}{32}$ |

平均律はCマイナーと同様に整数比にすることは難しい。純正律は整数比にはできるものの、ソの分母と分子の数値が大きいためCマイナーと比べるときれいな比にはならないことが分かる。このことから、純正律でも音の重なり方はCディミニッシュがあまりきれいではなさそうだと考えることができた。

そして、Cマイナーと同様にリサージュ図形も見てみる。まず、平均律は図3のようになり、Cマイナーと同じく空間を埋めるような図ができた。

次に、図4に純正律のリサージュ図形を示す。平均律よりはきれいな図を得たが、純正律にしては線の数が多い。このことから、Cディミニッシュは3音がきれいに重なっ

5 おわりに

以上、数値や図形を用いて音律と和音を数学的な視点から検証を行った。今回使用した2種類の和音の周波数の比では、平均律と純正律で大きく異なる数値となり、リサージュ図形も波形の重なりに大きな違いを確認することができた。ところが、いくつかの音律で和音を鳴らせるハーモニーディレクターで実際に音を聞いてみると、CマイナーとCディミニッシュの心地よさの違いは分かるものの、平均律と純正律の違いはあまり実感できないことも分かった。この結果から、感覚的には分かりづかった音の響きというものは、周波数の比が整数値になることでより心地の良いハーモニーになるということが、リサージュ図形をもとに視覚的に理解することができた。また、一般的に平均律が利用されているピアノなどを身近にしている環境では、閉曲線が描かれるあまりきれいではない響きでもたいては違和感を感じないということ結果も得ることができた。ぜひ実際に音を聞いてもらうことで音律や和音について、概念と感覚の差を実感してもらいたいと考えている。

参考文献

- [1] 小方厚, 高田拓人, 中川響, 山本勇貴:『視で聴くドレミ フーリエ音楽学への招待』. 大阪大学出版会, 大阪, 2013
- [2] 小方厚:『音律と音階の科学』. 講談社, 東京, 2018.
- [3] 西原稔・安生健:『数学と科学から読む音楽』. ヤマハミュージックエンタテイメントホールディングス, 東京, 2019.