

安定多様体法を用いた倒立振子の非線形最適制御

2020SC014 林優作

指導教員：陳幹

1 はじめに

最適制御は現代制御理論における基本問題であり, その中でも非線形制御においてはハミルトン・ヤコビ方程式の求解が困難であるため, 線形制御と比較して深く研究されていない. 本論文では坂本ら [1] によって提唱された安定多様体法によるハミルトン・ヤコビ方程式の求解を行い, 得られた解を用いた制御則の検証を行う. 制御対象は倒立振子を用い, 運動方程式の導出, 安定多様体法によるハミルトン・ヤコビ方程式の求解, 制御のシミュレーションの順で説明する.

2 状態方程式の導出と問題設定

本論文の目的である非線形最適制御の検証のため, 制御対象の状態方程式を導出する. 制御対象を図 1 に示す.

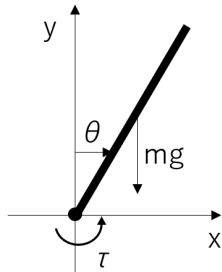


図 1 倒立振子のモデル

入力 u を用いて $\tau = \tau_m u - \tau_\theta \dot{\theta}_0$ とし, 状態変数

$x = [\theta, \dot{\theta}]^T$ とすると, 状態方程式は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + Bu & (1) \\ f(x) &= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ (mgl \sin \theta - D\dot{\theta} - \tau_\theta \dot{\theta}^2)/(ml^2 + I) \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_m/(ml^2 + I) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

本論文では, 倒立振子の最適制御問題を考える. 評価関数を以下に示す.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru) dt & (2) \\ Q &= \text{diag}[1, 1], R = 1 \end{aligned}$$

3 安定多様体法

ハミルトン・ヤコビ方程式を以下のように定める.

$$H = p^T f(x) - \frac{1}{2} p^T B R^{-1} B^T p + \frac{1}{2} x^T Q x \quad (3)$$

なお, ハミルトンの正準方程式は以下のように定まる.

$$\dot{x} = f(x) - B^T R^{-1} B p \quad (4)$$

$$\dot{p} = -p^T \frac{\partial f}{\partial x}(x) - Qx \quad (5)$$

$f(x)$ を原点で線形化して $Ax, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ とし, Riccati 方程式の安定化解 $P, F = A - B^T R^{-1} B P$

としたときの $SF + F^T S = B^T R^{-1} B$ の解 S を用いて T 行列を以下のように定める.

$$T = \begin{bmatrix} I & S \\ P & PS + I \end{bmatrix}$$

$[x, p]^T = T[x', p']^T$ のように座標変換を行うと, (4),(5) から以下の式が導出される.

$$\dot{x}' = Fx' + n_s(x', p') \quad (6)$$

$$\dot{p}' = -F^T x' + n_u(x', p') \quad (7)$$

なお, n_s, n_u は x', p' の 2 次以上の項である.

[2] によると, (6),(7) は以下のように書き換えられ, k の数が増えるほど (3) の解に近づく.

$$\dot{x}_{k+1}(t) = Fx_{k+1}(t) + n_s(x_k(t), p_k(t)) \quad (8)$$

$$\dot{p}_{k+1}(t) = -F^T p_{k+1}(t) + n_u(x_k(t), p_k(t)) \quad (9)$$

4 シミュレーション

(8) (9) に対応する計算を $k = 18$ まで行った. 横軸を θ , 縦軸を $H(x_k, p_k)$ としたときの応答を図 2 に示す. 数値を出力すると $k = 18$ において $0 \leq \theta \leq 1.49[\text{rad}]$ まで安定化できていた.

次に倒立振子の制御シミュレーションを行う.

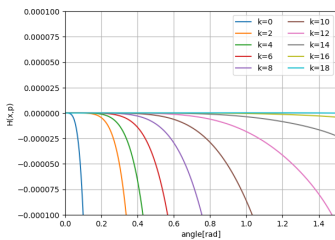


図 2 θ に対する $H(x, p)$ の応答

θ の初期値を $1.49[\text{rad}]$ とし, 非線形最適制御 (nonliner) を加えた時の θ と u の時間応答を, 線形制御 (liner) の応答と合わせて図 3 に示す. 結果から, どちらも一定時間後に $\theta = 0$ に制御で

きており, 評価関数の値を計算すると, 非線形最適制御では $J \simeq 3.44$, 線形制御では $J \simeq 3.55$ となり, 非線形最適制御の方が制御性能が高いことが分かる.

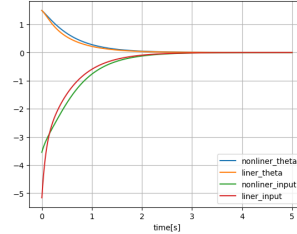


図 3 $\theta(t)$ 及び $u(t)$ の時間応答

5 おわりに

本論文では制御対象のモデリング, 安定多様体法を用いたハミルトン・ヤコビ方程式の求解, 得られた解を用いた非線形最適制御の検証を行った. シミュレーションでは安定領域内の制御が可能であることを確認すると同時に, 線形制御との比較を行い, 評価関数の値から非線形最適制御の方が優れていることを確認した. 今後の課題として, 入力に制限を加えるなど実機に近いモデルでのシミュレーションを行うことや, 安定化領域を $\theta = \pi$ まで広げ, 振り上げ制御を可能にすることなどが挙げられる.

参考文献

- [1] Noboru Sakamoto and Arjan J. van der Schaft, Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the Hamilton-Jacobi equation, Automatica, vol.53, No.10, 2335/2350(2008)
- [2] 坂本登, 非線形最適制御とその実用化への取り組み, 計測と制御 第 61 巻 第 2 号 2022 年 2 月号