

# シーケント体系を用いた日本語証明の分析

2019SS89 余吾祐貴子

指導教員: 佐々木克巳

## 1 はじめに

本研究の目的は、数学書で与えられた日本語証明(日本語で書かれた証明)をシーケント体系の証明図を用いて表現することで、日本語証明においてまとめられている基本的な推論の傾向を考察することである。この研究は[2]でも述べられているが、本研究は[2]とは異なる日本語証明を対象とすることで、より広い範囲に当てはまる傾向を導くことができた。具体的に対象とした日本語証明は、[1]などから抽出した 12 個であり、それらは集合や写像に関する証明である。

本稿では、2 節で考察に必要なシーケント体系を導入し、3 節で本研究で扱った 12 個のうちの 1 個に対して、日本語証明を図式や証明図で表し、その推論規則をグループに分けた結果を示す。4 節では、本研究で扱う日本語証明にも当てはまるように、[2]の傾向を拡張した結果を示す。

## 2 シーケント体系

この節では、[2]に従い、シーケントと、シーケントの変化により証明を表現した証明図を導入する。論理結合子「かつ」、「または」、「ならば」、「～でない」と限定子「すべての  $x$  に対して～」、「ある  $x$  が存在して～」をそれぞれ、 $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall x, \exists x$  と表す。述語の対象を表す記号として、 $s, t, s_1, s_2, \dots$  などを、述語を表す記号として、 $P, Q, R, P_1, P_2, \dots$  などを用いる。 $x$  についての述語は  $P(x)$  のように表すこともある。また、集合  $X$  に対して、 $\forall x(x \in X \rightarrow P)$  と  $\exists x(x \in X \wedge P)$  を、それぞれ、 $(\forall x \in X)P$  と  $(\exists x \in X)P$  と略記することもある。 $s$  および  $P$  の  $x$  に  $t$  を代入した結果をそれぞれ、 $s[t/x]$  および  $P[t/x]$  と表す。

使える性質の列と導きたい性質のペアを意図した形式表現

$$P_1, \dots, P_n \Rightarrow Q$$

をシーケントという( $n=0, 1, 2, \dots$ )。  $P_1, \dots, P_n$  をこのシーケントの左辺、 $Q$  を右辺という。左辺が「使える性質の列」を、右辺が「導きたい性質」をそれぞれ表現している。

シーケントを表す記号として、 $S, S_1, S_2, \dots$  などを、シーケントの左辺に現れる述語の有限列を表す記号として  $\Gamma$  を用いる。

証明図は、証明におけるシーケントの変化の過程を形式的に表現した図式として定義する。そのために、まず、シーケントの変化の形式表現を導入する。「シーケント  $S_1, \dots, S_n$  からシーケント  $S$  が導かれる」という変化

を

$$\frac{S_1 \cdots S_n}{S}$$

と表現し、これを推論規則という。各  $S_i$  をこの推論規則の上式、 $S$  を下式という。

証明図とは、正しいと認めたシーケントから正しいと認めた推論規則を積み上げた図式である。本稿では、 $P \Rightarrow P$  を正しいと認め、正しいと認めた推論規則として選んだ推論規則の一部を以下に示す。

$$\frac{P', \Gamma \Rightarrow Q}{P, \Gamma \Rightarrow Q \text{ (Def 左)}} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow P'}{\Gamma \Rightarrow P \text{ (Def 右)}}$$
$$\frac{f(x) \in Y, \Gamma \Rightarrow Q}{x \in X, \Gamma \Rightarrow Q \text{ (写像)}} \quad \frac{z \in X, \Gamma \Rightarrow P(z)}{\Gamma \Rightarrow (\forall x \in X)P(x) \text{ (}\forall \rightarrow \text{右)}}$$
$$\frac{z \in X, P(z), \Gamma \Rightarrow Q}{(\exists x \in X)P(x), \Gamma \Rightarrow Q \text{ (}\exists \wedge \text{左)}} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow Q}{P, \Gamma \Rightarrow Q \text{ (w 左)}}$$

ただし、 $(\forall \rightarrow \text{右}), (\exists \wedge \text{左})$ において、 $z$  は下式で自由な出現をもたない変数である。 $X, Y$  は集合で、 $f$  は  $X$  から  $Y$  への写像である。 $(\text{Def 左})$ と $(\text{Def 右})$ の  $P$  と  $P'$  は、次の同値性の左辺と右辺、または右辺と左辺である。

$$[\cap] x \in X \cap Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \in Y$$
$$[\subset] X \subset Y \Leftrightarrow (\forall x \in X)(x \in Y)$$
$$[\text{像}] y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A)(f(x)=y)$$

## 3 日本語証明

本研究では、[1]などから抽出した 12 個の日本語証明に対して、次の 5 つを示すことで、日本語証明においてまとめられている基本的な推論をグループに分けた。

- (1) 証明すべき性質。
- (2) 文献に示された日本語証明。
- (3) (2)の筋道をシーケントの変化で表現した図式。
- (4) (3)の図式に、必要なシーケントを補うことによってできる証明図。ただし、(w 左)は適宜省略し、左辺の  $P \wedge Q$  は列  $P, Q$  と同一視する。
- (5) (4)の推論規則を、(3)でどのようにまとめられているかによりグループ分けした結果。

この節では、本研究で扱った 12 個のうちの 1 個に対する結果を示す。具体的には以下の通りである。

(1) 証明すべき性質([1]). 写像  $f: A \rightarrow B$ ,  $A$  の部分集合  $A_1, A_2$  に対して、 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ 。

(2) 日本語証明([1]). 任意の  $y \in f(A_1 \cap A_2)$  をとると、 $y=f(x)$  となるような  $x \in A_1 \cap A_2$  がとれる。このとき、 $x \in A_1$  かつ  $x \in A_2$  であることから、 $f(x) \in f(A_1)$  かつ  $f(x) \in f(A_2)$  となる。よって、 $y=f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$  となるので、 $f(A_1 \cap A_2)$

$\subset f(A_1) \cap f(A_2)$ を得る.

(3) (2)の筋道を表現した図式.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2), y=f(x) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)}{f(x) \in f(A_1), f(x) \in f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)}{x \in A_1, x \in A_2, y=f(x) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)}{(\exists x \in A_1 \cap A_2)(y=f(x)) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)}{y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)}{\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)}$$

(4) (3)の図式をもとにした証明図((3)に現れるシーケントは太字になっている).

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2), y=f(x) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)}{f(x) \in f(A_1), f(x) \in f(A_2), y=f(x) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)} \text{ (Def 左)}}{f(x) \in f(A_1), x \in A_2, y=f(x) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)} \text{ (写像)}}{x \in A_1, x \in A_2, y=f(x) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)} \text{ (写像)}}{x \in A_1 \cap A_2, y=f(x) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)} \text{ (Def 左)}}{(\exists x \in A_1 \cap A_2)(y=f(x)) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)} \text{ (}\exists \wedge \text{左)}}{y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)} \text{ (Def 左)}}{\Rightarrow \forall y(y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2))} \text{ (}\forall \rightarrow \text{右)}}{\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)} \text{ (Def 右)}$$

(5) (3)にもとづく, (4)の推論規則のグループ分け. 次の5つのグループに分けられる. ただし, (4)で下に現れるものが番号の若いグループに分けられている.

- 1 (Def 右)[ $\subset$ ], ( $\forall \rightarrow$ 右)
- 2 (Def 左)[像]
- 3 ( $\exists \wedge$ 左), (Def 左)[ $\cap$ ]
- 4 (写像), (写像)
- 5 (Def 左)[ $\cap$ ]

## 4 傾向の考察

この節では, [2]で示された日本語証明においてまとめられている基本的推論の傾向を, 本研究で扱った 12 個の日本語証明にも当てはまるように拡張した結果を示す. この拡張は, 3 節の(5)のグループ分けの結果をもとに行われている.

[2]で述べられた傾向は次の(TS1)~(TS5)の 5 つである.

(TS1) (Def 右)は, それと,  $\forall$ と $\rightarrow$ の右の推論規則が適用できるところまでまとめられて, その最後の推論規則の上式に対応する文が日本語証明に現れている.

(TS2) (Def 左)[単射]が適用されるときは, 少なくとも ( $\forall \rightarrow$ 左)と( $\rightarrow$ 左)はまとめられている.

(TS3) (Def 左)[全射]が適用されるときは, 文献に差がある. [1]では( $\exists \wedge$ 左)までがまとめられて, その( $\exists \wedge$ 左)の上式に対応する文が日本語表現に現れる. 一方, [3]では( $\exists \wedge$ 左)の下の推論規則までがまとめられて, ( $\exists \wedge$ 左)の下式に対応する文が日本語表現に現れる.

(TS4) ( $\circ$ ), (=)は, 単独で他の推論規則とはまとめられていないか, ( $\exists \wedge$ 右), ( $\exists \wedge$ 左), (集合 1), (逆像)のみがまとめられる.

(TS5) 変数以外の項が代入された( $\forall$ 左)と( $\exists \wedge$ 右)および, 下式右辺が日本語証明に現れない( $\exists \wedge$ 右)は, その

上式に対応する文が日本語表現に現れる.

上の傾向を, 本研究の日本語証明にも当てはまるよう拡張した結果は以下のとおりである.

(傾向 1) (Def 右)は, 論理記号・限定記号に関する推論規則((dM)も含む)とだけまとめられ, それ以外の推論規則とはまとめられない.

(傾向 2) (Def 左)は, 他の種類の推論規則とはまとめられていないか, ( $\forall \rightarrow$ 左), ( $\rightarrow$ 左), ( $\exists \wedge$ 左), (dM)のみがまとめられている.

(傾向 3) (写像)は, 他の種類の推論規則とはまとめられていない.

(傾向 4) ( $\circ$ ), (=)は, 他の種類の推論規則とはまとめられていないか, ( $\exists \wedge$ 右), ( $\exists \wedge$ 左), ( $\forall$ 左), (集合 1), (集合 2), (集合 3), (逆像), (Def 左)[ $\cap$ ][ $\cap$ が上式]がまとめられる. (傾向 5) (TS5)と同じ.

上の(傾向 1)~(傾向 5)が[2]の(TS1)~(TS5)をより広い範囲に当てはまることを確認するために, 本研究の(傾向 1)~(傾向 5)と[2]の(TS1)~(TS5)が, 3 節で示した 1 つの日本語証明の(5)の各グループに当てはまるかをまとめた表 1 を示す. 「 $\times$ 」は傾向の対象外であることを示す.

表 1: グループと傾向

|   | 推論規則   | [2]の傾向   | 本研究の傾向 |
|---|--|----------|--------|
| 1 | (Def 右)[ $\subset$ ], ( $\forall \rightarrow$ 右) | (TS1)    | (傾向 1) |
| 2 | (Def 左)[像]                                       | $\times$ | (傾向 2) |
| 3 | ( $\exists \wedge$ 左), (Def 左)[ $\cap$ ]         | $\times$ | (傾向 2) |
| 4 | (写像), (写像)                                       | $\times$ | (傾向 3) |
| 5 | (Def 左)[ $\cap$ ]                                | $\times$ | (傾向 2) |

上の表から分かるように, [2]の傾向では「 $\times$ 」になっているグループが多いが, 本研究の傾向ではほとんどグループがどれかの傾向に当てはまっている. このことは, 本稿で示していない. 他の 11 題に対しても同様の表を示すことで確認されている. これらのことから, 本研究の傾向が[2]の傾向の拡張になっていることが確認できる.

## 5 おわりに

本研究では, 写像を中心とした様々な証明を図式や証明図として表した. 日本語証明の対象を広げることでより幅広い傾向を見出すことができた. 今後は, 集合や写像以外の証明についての傾向の研究も続けていきたい.

## 参考文献

- [1] 庄田俊宏, 『集合・位相に親しむ』, 現代数学社, 京都, 2010
- [2] 田中優祐, 佐々木克巳, 「証明図による日本語証明の分析」, アカデミア理工学編, 南山大学紀要, 22, pp. 29-45, 南山大学, 2022