

タブローを用いた論理パズルの効果的解法

2019SS059 小川 祐

指導教員: 佐々木克巳

1. はじめに

本研究の目的は、嘘つきと正直者の論理パズルをタブローによる解法で解く際の効果的解法を考察することである。本研究で扱う論理パズルは、いくつかの発言から、発言者が正直者か嘘つきかを求めるパズルである。いくつかの発言のうち、どの発言を最初に扱えば効果的にパズルを解けるかを考察する。

本稿では、2 節で、タブローによる解法を、3 節では、本研究で扱う論理パズルと本研究で提案する解法、つまり最初に扱うべき発言を述べ、4 節で、3 節で提案した解法が、他の解法と比べて効果的であることを、具体的な 7 題で例証する。

2. タブローによる解法

タブローは[4]などで、証明を形式化した図式として紹介されている。[2]は、その図式を、論理パズルを解くために利用し、そのために特化したタブローの定義と性質を挙げている。

この節では、タブローによる解法を、[2]にしたがって述べる。本稿では、2 つの文 P, Q に対して「 P かつ Q 」を $P \wedge Q$ 、「 P または Q 」を $P \vee Q$ 、「矛盾」を \perp と表す。

まず、タブローを定義する。

定義 2.1. 文の有限集合 S に対して、 S のタブローを次のように定義する。

(1) S に属する文を、縦に並べた図は S のタブローである。

(2) S のタブロー T とその 1 つの枝を θ とする。

(2.1) θ に現れる文から文 P が導かれるとき、 T の θ の下に P を書き加えてできる図は、 S のタブローである。

(2.2) θ に文 $P \vee Q$ が現れるとき、 T の θ の下に $\begin{array}{c} \wedge \\ P \quad Q \end{array}$ を書き加えてできる図は、 S のタブローである。

タブローによる解法は、タブローの次の性質によって、保証される。

性質 2.2. S は正しい文の集合、 T は S のタブローとする。 T に、 \perp の現れない枝がちょうど 1 つだけあるとき、その枝に現れる文はすべて正しい。

タブローによる解法: 問題文からわかる文の集合に、定義 2.1(1)の操作を、次の 2 つの条件を満たすまで、適用したタブロー T を作り、(条件 2)の「解を導く文」から解を導く方法。

(条件 1) T に、 \perp が現れない枝がちょうど 1 つある。

(条件 2) (条件 1)の枝に、解を導く文が現れる。

つまり、タブローの解法による解は、上のタブローを作成することで得られる。以下では、パズルの解法を上タブローの作成法を示すことで、与えることにする。

3. 論理パズルとその解法

1 節で述べたとおり、本研究で扱う論理パズルは、いくつかの発言から、発言者が正直者か嘘つきかを求めるパズルであり、本研究では、いくつかの発言のうち、どの発言を最初に扱えば効果的にパズルが解けるかを考察する。したがって、最初に扱った発言ごとの解法を比較することになるが、そのためには、その発言ごとの解法が一定の基準に従っていないなければならない。

この節では、本研究で扱う論理パズルの詳細を述べた後、その一定の基準に従った解法、つまり、本研究で対象とする解法を示し、解を的に効果的に求めるためには、どの発言を最初に選ばよいかを提案する。ここで提案した解法が比較的効果的であることは、4 節で示す。

まず、本稿で扱う論理パズルは、複数の発言者の発言をもとに、発言者が正直者か嘘つきかを求めるパズルである。発言者は必ず正直者か嘘つきかのどちらかであり、正直者は常に正しい発言を、嘘つきは常に間違った発言をする、とする。各発言者の発言は 1 つである。

本研究で対象とする解法を記述するためにいくつかの準備をする。本稿では、「 X は正直者である」を $T(X)$ 、「 X は嘘つきである」を $L(X)$ 、 X の発言を $P(X)$ 、「 $P(X)$ でない」を $\neg P(X)$ と表す。これらの記号を用いると、本研究の論理パズルの条件は、次の性質で表現される。

性質 3.1. 発言者 X に対して、次が成り立つ。

(1) $T(X) \vee L(X)$.

(2) $(\neg T(X)) \wedge \neg P(X)$ は同値である。

本研究で対象とする解法は、発言者 X に対する 2 つの値 $N_T(X)$ と $N_L(X)$ を用いて、各発言者ごとに定義する。以下に、 $N_T(X)$ と $N_L(X)$ を定義する。

定義 3.2. n 人の発言者が登場する問題とその問題の発言者 X に対して、 n 人の発言者が正直者か嘘つきかの 2^n 個の組のうち、 $T(X)$ と $P(X)$ がどちらも真となるものの個数を $N_T(X)$ 、どちらも偽となるものの個数を $N_L(X)$ と表す。

さて、本研究で対象とする解法は、指定された発言者に対して、次の追加条件 3.3 を満たすタブローにより解を導く方法である。この追加条件において、性質 3.1(2)を用いなくて P から Q が導かれることを、 P から Q が CL で導出可能という。性質 3.1(2)を用いてよい場合は、単に、 P から Q が導出可能という。

追加条件 3.3.

- (1) タブローに現れる文は, $T(X)$, $L(X)$, $P(X)$, $\neg P(X)$, \perp , $T(X) \vee L(X)$ の 6 種類のいずれかである.
- (2) 定義 2.1(2.1)における枝 θ への文の追加は, θ に現れない文の追加であり, さらに, 次のいずれかの形に限る.
 - (2.1) θ に $T(X)$ と $L(X)$ が現れる場合, \perp を追加できる.
 - (2.2) 次のいずれかの場合, $P(X)$ を追加できる.
 - (2.2.1) θ に $T(X)$ が現れ, かつ, θ から $P(X)$ が CL では導出不可能である場合.
 - (2.2.2) θ に $T(X)$ が現れず, かつ, θ から $P(X)$ が CL で導出可能である場合.
 - (2.3) 次のいずれかの場合, $\neg P(X)$ を追加できる.
 - (2.3.1) θ に $L(X)$ が現れ, かつ, θ から $\neg P(X)$ が CL では導出不可能である場合.
 - (2.3.2) θ に $L(X)$ が現れず, かつ, θ から $\neg P(X)$ が CL で導出可能である場合.
 - (2.4) θ から $T(X)$ が CL で導出可能である場合, $T(X)$ を追加できる.
 - (2.5) θ から $L(X)$ が CL で導出可能である場合, $L(X)$ を追加できる.
 - (2.6) θ に $T(X) \vee L(X)$ を追加できる (X は指定された発言者).
 - (2.7) θ に $T(X)$ も $L(X)$ も現れない場合, $T(X) \vee L(X)$ を追加できる (X は指定された発言者以外の発言者).
- (3) 定義 2.1(2)による枝 θ への文の追加は, 次の優先順位で行う. ただし, θ に \perp が現れているときは追加しない.
 - 順位 1. 上の(2.6)
 - 順位 2. 上の(2.1)
 - 順位 3. 上の(2.2)~(2.5) ただし, $\text{Max}\{N_T(X), N_L(X)\}$ が小さい X に対する文の追加が優先,
 - 順位 4. 定義 2.1(2.2)による追加
 - 順位 5. 上の(2.7)

本研究で対象とする解法は, 問題に現れる各発言者 X に対する次の解法 X である.

定義 3.4. 発言者 X に対して, X を指定された発言者としたときの, 追加条件 3.3 を満たすタブローによる解法を, 解法 X という.

そして, 本研究で比較的効果的な解法として提案するのは, $\text{Max}\{N_T(X), N_L(X)\}$ が最も小さい発言者 X に対する解法 X である.

4. 例証

本研究では, 3 節で提案した解法が比較的効果的であることを, 7 題のパズル([1]と[3]から抽出した問題を, 単純化したもの)で例証した. この節ではその概要を示す. 比較の対象となる解法は, 前節で述べたとおり, 問題に現れる各発言者 X に対する解法 X であり, 「比較的効果的」であるとは, その解法のタブローに現れる文の総数がほかの解法と比べ, 比較的小さいことである. より正確に

述べると, 解法 X が, 「比較的効果的」であるとは,

$EV(X) = S(X) - \text{Min}\{S(Y) | Y \text{ は問題の発言者}\}$ の値が小さいこととする. ただし, $S(X)$ は解法 X で作成されるタブローに現れる文の総数である.

7 題のパズル(問 4.1~問 4.7)それぞれに対して, 各発言者 X の $EV(X)$ を比較した結果を表 4.1 に示す. 表 4.1 の「 $EV(X)$ 」の列には, 各発言者の $EV(X)$ を小さい順に並べて記している. 値に括弧がついているのが, 本研究で提案する解法の $EV(X)$ である. 問 4.5 は, $\text{Max}\{N_T(X), N_L(X)\}$ が最も小さい発言者 X が 2 人いるため, 括弧をつけた数字が 2 つある.

表 4.1 より, 各問題において, 括弧のついた値の順位が高いことが分かる. このことは, 本研究で提案した解法 ($\text{Max}\{N_T(X), N_L(X)\}$ が最も小さい発言者の発言を最初に扱う解法)のタブローに現れる文の総数が比較的小さいことを示していて, 本研究で提案した解法が比較的効果的であることを例証できたと考ええる.

表 4.1: 各問の各発言者の $EV(X)$

	発言者の数	$EV(X)$	順位
問1	4	0, (1), 1, 5	2
問2	4	(0), 0, 7, 9	1
問3	4	0, (1), 1, 2	2
問4	5	0, 3, (5), 5, 15	3
問5	5	(0), (0), 1, 5, 9	1
問6	5	(0), 0, 7, 10, 13	1
問7	5	0, (7), 7, 11, 11	2

5. おわりに

本研究では, 正直者と嘘つきの論理パズルにおいて, いくつかの発言のうち, どの発言者を最初に扱うとサイズの小さいタブローで解を得られるかを考察し, $\text{Max}\{N_T(X), N_L(X)\}$ が最も小さい発言者を最初に扱った場合に比較的小さいタブローで解を得られることを例証した. その例証では, 追加条件 3.3 にあるように, 統一的なタブローを用いていることから, タブローのサイズの比較が対等に行われており, その意味で, 本研究の結果には, 一定の保証が与えられていると考える.

参考文献

- [1] 小野田 博一, 『面白くてやめられない論理パズル』, 中経出版, 東京, 2003.
- [2] 佐々木克巳, 『2019 年度ソフトウェア工学演習 VII 講義資料』, 南山大学, 2019.
- [3] 佐々木克巳, 2021 年度「システム数理演習 III」講義資料, 南山大学, 2021.
- [4] Raymond Smullyan, 『スマリヤン 記号論理学 一般化と記号化』, 丸善出版, 東京, 2013.