教科書をもとにした図形指導に関する考察

2019SS056 野中 貴
指導教員: 佐々木克巳

1. はじめに

本研究の目的は, 教科書における用語・性質をもとに, それらに関連する内容を教科書に補い(行間埋め), よりよい授業につなげることである. 対象とする単元は, 中学校数学第 3 学年の「図形」である. この行間埋めは, 5 つの視点, すなわち,
・視点 1:学習指導要領解説([2])がどのように反映されているか
・視点 2:東京書籍, 数研出版, 啓林館の教科書([1], [4], [5])の比較からわかることはないか
・視点 3:別の解法はないか
・視点 4:条件変えなどで内容を発展させられないか
・視点 5:より丁寧な記述にするとどうなるか
をもとに行う.

本研究では,「相似な図形」,「平行線と線分の比」,「三平方の定理」に現れるいくつかの用語・性質をもとに, 5 つの視点から行間埋めを行い, 3 社の教科書のどれを使ってもよりよい授業につなげることができるような成果を得た. 具体的に対象とした用語・性質は「相似な図形」からは,「相似の定義」などの 5 つ,「平行線と線分の比」からは「中点連結定理の利用」などの 3 つ,「三平方の定理」からは,「三平方の定理」の 1 つである. 本稿では, そのうちの,「中点連結定理の利用」の行間埋めの例を 2 節で示す.

2. 中点連結定理の利用

この節では, 3 社の教科書に現れる「中点連結定理の利用」について, 視点 4, すなわち, 条件変えなどで内容を発展させられないかという視点から, 3 社の教科書に補うべき内容を考察する.

まず, 3 社ともに次の性質

性質 2.1.(凸の)四角形 ABCD において, 4 辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ E, F, G, H とする. このとき, 四角形 EFGH は平行四辺形になる.

を扱っていて, その証明も記載されている. 性質 2.1 を発展させる方法は 3 つあり, 具体的には, 以下の通りである.
(E1)3 社の教科書の記述からの考察
(E2)性質 2.1 の「(凸の)四角形」をより広い範囲の図形にした考察
(E3)性質 2.1 の 4 点 E, F, G, H のとり方を変える考察
ここでは,(E2)と(E3)を示す.

まず,(E2)を示す.(E2)の「より広い範囲の図形」とは,「4 点 A,B,C,D をこの順でつなげてできる図形」である. この考察は[3]でも行われている. [3]では, 性質 2.1 の 2 種類の証明も含めて, より広い図形での考察をしている. 本稿では, そのうちの△ABC と△ADC など 1 辺を共有する 2 つの三角形に中点連結定理を適用する証明が, 広い範囲の図形にしても適用できることを示す. より正確には, 次の性質 2.2 が, その 2 つの三角形に中点連結定理を適用する方法で証明できることを示す.

性質 2.2. 異なる 4 点 A, B, C, D がある. 4 つの線分 AB, BC, CD, DA の中点を, それぞれ, E, F, G, H とおき, この 4 点 E, F, G, H をこの順でつなげると四角形ができるとする. このとき, 四角形 EFGH は平行四辺形である.

証明. 4 点 A, B, C, D が一直線上にあるときは, E, F, G, H もその直線上にあり, 4 点 E, F, G, H からは四角形はできない. よって, A, B, C, D のうち, うまく 3 点を選ぶと三角形ができる. その 3 点を A, B, C としても一般性は失われない. 以下, △ABC があることを前提とし, 図 2.1 の(C1)～(C8)の 8 つの領域のうち, D がどの位置にあるかで場合分けして示す.

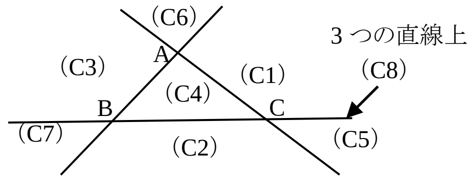

図 2.1:D の位置の場合分けの図

(C1)性質 2.1 より成り立つ.
(C2)(図 2.2 参照)△ABC と△ADC ができるので, これに中点連結定理を適用して,

$$EF//AC//HG, EF=AC/2=HG.$$

よって, 四角形 EFGH は平行四辺形である.
(C3)A, B, C, D は(C2)と同じ形の図形をつくるので,(C2)の証明の A, B, C, D の名前を適切につけかえることで証明できる.
(C4)(図 2.3 参照)(C2)と全く同じ証明になる.
(C5),(C6),(C7)A, B, C, D は,(C4)と同じブーメラン形をつくるので,(C4)の証明の A, B, C, D の名前を適切につけかえることで証明できる.
(C8)D がどれかの辺の延長線上にあるが, その辺を BC としても一般性は失われない. さらに, D が辺 BC 上にある場合と, そうでない場合に分ける.
(C8.1) D が辺 BC 上にある場合(図 2.4 参照)(C2)と全く同じ証明になる.
(C8.2) D が辺 BC 上にない場合(図 2.5 参照)(C2)と全く同じ証明になる.
なお, A, B, C, D は異なる 4 点なので, D が辺 BC の端点であることはない.

以上より，どの場合も，(C1)あるいは(C2)と同様にできることがわかる．各教科書における(C1)の証明も，1 辺を共有する 2 つの三角形に中点連結定理を適用する方法で示されているので，どの場合も，その方法で示されたことになる．

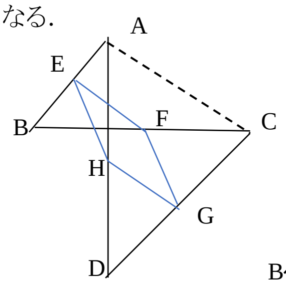

図 2.2：(C2)の図

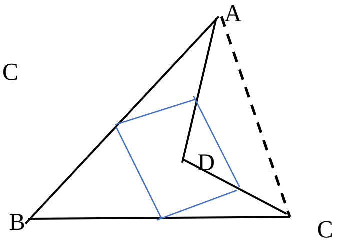

図 2.3：(C4)の図

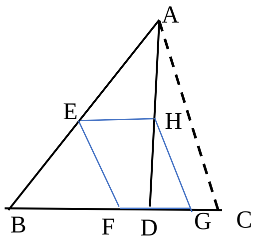

図 2.4：(C8.1)の図

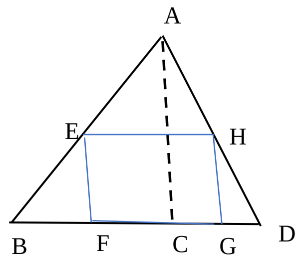

図 2.5：(C8.2)の図

次に，(E3)の考察，すなわち，性質 2.1 の 4 点 E, F, G, H のとり方を変える考察を行う．たとえば，図 2.2 では，四角形 ABDC の辺 AB，辺 CD，対角線 AD，対角線 BC の中点をとったと捉えることもできて，その考察は，性質 2.1 の中点 E, F, G, H の取り方を変えた考察と捉えることができ，結果，中点を結んでできる四角形は平行四辺形であった．一方，図 2.6 のように，H を対角線 BD の中点(E, F, G は性質 2.1 のとおり)としたときは，E, F, G, H をこの順で結んでも平行四辺形はできない．

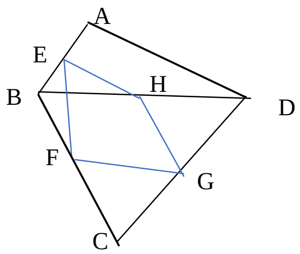

図 2.6：H を BD の中点とした性質 3.2 の図

この考察では，6 つの線分(4 辺と 2 つの対角線)のどの 4 つから中点をとれば，中点を結んでできる図形が平行四辺形となるかを考える．図 2.6 の場合は，頂点 B が，選んだ 4 つの線分のうちの 3 つの線分の端点であるが，図 2.2 の場合は，もとの四角形 ABDC の各頂点は，選んだ 4 つの線分のうちのちょうど 2 つの線分の端点である．このことに注目して，性質 2.1 を一般化した次の性質が成り立つことを示す．

性質 2.3. (凸の)四角形 ABCD の 4 辺と 2 つの対角線の 6 つの線分を考える．この 6 つの線分から 4 つの線分を，次の条件を満たすように選ぶとき，その 4 つの線分の中点をうまく結ぶと平行四辺形になる．

(条件)四角形 ABCD の各頂点は，その 4 つの線分のうちのちょうど 2 つの線分の端点である．

証明．4 辺と 2 本の対角線は，AB, AC, AD, BC, BD, CD の 6 つである．条件を満たす 4 つの線分の選び方は，
(E3.1)AB, AD, BC, CD （四角形ができる）
(E3.2)AC, AD, BC, BD （図 2.7 の図形ができる）
(E3.3)AB, AC, BD, CD （図 2.7 の A, B, C, D をそれぞれ D, A, B, C に置き換えた図形ができる）
の 3 とおりである．
(E3.1)の場合．性質 3.2 のように中点 E, F, G, H をとれば，性質 3.2 から，E, F, G, H を順に結べば平行四辺形 EFGH ができる．
(E3.2)の場合．E, F, G, H はそれぞれ AC, AD, BC, BD の中点とする．△ABC と△ABD ができるので，これに中点連結定理を適用して，

EG//AB//FH, EG=AB/2=FH.

よって，四角形 EFHG は平行四辺形である(図 2.7 参照)．

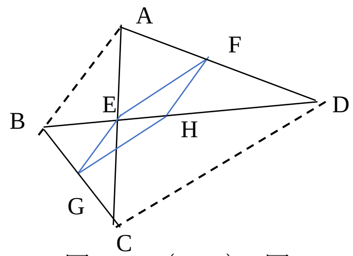

図 2.7： (E3.2)の図

(E3.3)の場合．(E3.3)の場合の頂点の名前 A, B, C, D をそれぞれ D, A, B, C につけかえることで証明できる．

3.　おわりに

本研究では，中学校数学第 3 学年の「図形」を中心として，さまざまな考察を行った．図形の分野において，視覚的に内容を把握することは重要であるが，なぜそうなっているのかを理解することが大切であり，その説明が教科書の内容だけでは，難しいと感じた．この研究を活かし，理解することに苦しむ生徒を助けられるようなよりよい授業づくりを続けていきたい．

参考文献

[1] 藤井斉亮　ほか　40　名，『新しい数学3』，東京書籍，東京，2015.
[2] 文部科学省，『中学校学習指導要領(平成　29　年度告示)解説　数学編』，日本文教出版，大阪，2018.
[3] 長瀬隼大，佐々木克巳，「中点連結定理を用いた問題の統合的・発展的考察」，アカデミア理工学編，第 22 巻，南山大学，PP. 20-22，2022
[4] 岡部恒治　ほか　41　名，『これからの数学3』，数研出版，東京，2020.
[5] 岡本和夫　ほか　47　名，『未来へひろがる数学3　みんなで学ぼう編』，啓林館，大阪，2021.