

シンガポールと日本の数学教育の比較

一 三角形の合同と相似を中心として 一

20019SS017 服部 昭彦

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は、日本の教科書([1])とシンガポールの教科書([2])を比較し、シンガポールの教科書における優れた点を見出し、日本の教育にどう活かしていくかを考察することである。シンガポールの数学教育に注目したのは、PISA において数学的リテラシー上位の学力を持つことである([3])。対象とした単元は、三角形の合同と相似である。より具体的には、三角形の合同については、両国における導入方法、扱っている合同条件、合同条件を用いた証明問題を、三角形の相似については、両国における導入方法、扱っている相似条件、シンガポールの教科書において内容ごとに設けられている Thinking Time を対象とする。本稿では、相似について述べる。具体的には、2 節で両国の相似条件、3 節でシンガポールの Thinking Time について述べる。

2 三角形の相似条件

ここでは、両国において、三角形の相似条件をどのように導入しているかを比較する。(i)でシンガポールの、(ii)で日本の導入方法について具体的に述べたうえで、(iii)で両国の相似条件の導入方法を比較・考察する。

(i) シンガポールの教科書での導入方法

ここでは、シンガポールの教科書における三角形の相似条件の導入方法を示す。シンガポールの教科書では、はじめに以下の 3 つの各パターンの値が分かっている $\triangle ABC$ と $\triangle XYZ$ を作図させ、2 つの三角形のそれぞれの辺の比と対応する角が等しくなることを確認させることで相似条件を導いている。

(1) $\angle A (= \angle X)$ と $\angle B (= \angle Y)$ の値「2 角」

(2) $AB/XY (= BC/YZ = CA/ZX)$ の値「3 辺の比」

(3) $AB/XY (= BC/YZ)$ と $\angle B (= \angle Y)$ の値「2 辺の比とその間の角」

結果として導かれる相似条件は、次の 3 つである。

<相似条件>

(AA) 2 角

(SSS) 3 辺の比

(SAS) 2 辺の比とその間の角

シンガポールの合同条件の導入段階では、合同条件にならないパターン、たとえば「2 辺とその間にない 1 角」のパターンも考えさせていたが、上の相似条件の導入では、合同条件のとときは異なり、はじめから相似条件になり得る 3 つの条件を扱っている。

(ii) 日本の教科書での導入方法

ここでは、日本の教科書における三角形の相似条件の導入方法を示す。日本の教科書では、次の問からはじめられ

ている。

問([2])。 $\triangle ABC$ と、 $BC:EF=1:2$ の線分 EF があります。 EF を BC に対応する辺として、 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ となる $\triangle DEF$ をかきましよう。

そして、次の 3 つの決め方を考えさせて $\triangle DEF$ を作図し、 $\triangle ABC$ を 2 倍に拡大したものが $\triangle DEF$ と合同になることを、確認させることで相似条件を導いている。

(ア) 3 つの辺の長さを使ってかく

(イ) 2 つの辺の長さ、その間の角の大きさを使ってかく

(ウ) 1 つの辺の長さ、その両端の角の大きさを使ってかく

結果として導かれる相似条件は、シンガポールの相似条件と同じで、(AA), (SSS), (SAS) の 3 つである。

(iii) 相似条件の導入方法の比較

両国の導入方法の違いを 4 つの視点、すなわち、作図方法、定義、確認作業、合同条件との関係から表 1 にまとめる。表 1 の違いからわかる、数学教育における効果の違いを、表 2 にまとめる。ただし、本研究では、この導入段階で相似を確認する条件を定義とよんでいる。

表 1: 相似条件の導入の比較

	シンガポール	日本
作図方法	・分度器やコンパスを使用する記述はない。 ・辺の比を与えないで作図している。	・日本は、はじめから三角定規、分度器、コンパスを用いるヒントが与えられている。 ・辺の比を 1:2 と決めて作図している。
定義	・対応する辺の比率がすべて等しく、対応する角がそれぞれ等しい。	・一方の図形を拡大または縮小したとき、他方の図形と合同になる。
確認作業	・定義によるので、自身で作図した 2 つの三角形の辺の比の計算と対応する角の大きさの確認をしている。	・定義によるので、与えられた三角形を 2 倍にしたものが、作図した三角形と合同になることを確認している。
合同と関係	・(AA), (SSS), (SAS), それぞれについて Thinking Time という合同条件との関係を考える設問が設けられており、それらの類似点や相違点について考えている。	・合同条件との関係は、教科書の端の方に小さく吹き出しで「三角形の合同条件と比べてみよう」とあり、シンガポールのように大々的には取り扱っていない。

表 2:相似条件の導入の考察

	シンガポール	日本
作図方法	<ul style="list-style-type: none"> 合同条件と同様に、作図の制約がほとんど与えられておらず、生徒自身の発想力が養われる。また、できる図形が1つではないので、できた図形を見せ合うことで発見することもあると考える。 	<ul style="list-style-type: none"> 合同条件と同様に、文具を使うヒントや1辺、比の固定など、ある程度制約が与えられており、生徒同士で同じ図形が出来上がると考えられるため、シンガポールのように作図時の発想力や生徒同士でのコミュニケーション、発見は少ないと考える。
定義	<ul style="list-style-type: none"> 下の欄で示すように、定義を満たすかの確認が単純作業できて、論証の根拠として使いやすい。 定義の対象が、多角形に限られ、円などの曲線からできる図形は対象外である。 定義の内容から「形が同じ」という本来の認識を想像しにくい。 	<ul style="list-style-type: none"> 下の欄で示すように、定義を満たすかの確認には方眼紙などを用いる必要があり、論証の根拠としては用いにくい。実際、論証の根拠は相似条件を用いていて、定義を用いることは少ない。 定義の対象に、円などの曲線からできる図形も含まれる。 拡大・縮小という用語から、「形が同じ」という本来の認識を想像できる。
確認作業	<ul style="list-style-type: none"> 辺の比率、角の大きさを計算し、値としてみることができると、確認がしやすいと考える。 	<ul style="list-style-type: none"> 方眼を用いて確認する場合、しやすいが、方眼がない場合は確認がしにくいと考える。
合同の関係	<ul style="list-style-type: none"> Thinking Time という具体的な設問が与えられているので、それを通して、合同条件との関係を理解できる。一方、設問が対象としない関係についての発想力は養われない。 	<ul style="list-style-type: none"> シンガポールの Thinking Time のように、具体的な設問は与えられておらず、合同条件との関係を制約なしに考察することができ、発想力も養われる。

3 シンガポールの Thinking Time

ここでは、シンガポールの教科書における相似の導入部分にある Thinking Time の予想される正答と、予想される誤答を考察する。この Thinking Time は、3つの相似条件ごとの合同条件との関係を考えさせる設問で構成されている。本研究では、(AA)、(SSS)、(SAS)のすべての相似条件に対して考察したが、本稿ではそのうちの(AA)について述べる。(AA)の Thinking Time の予想される正答と予想される誤答を表3と表4にまとめる。

表 3: Thinking Time の設問と予想される正答

	Thinking Time の設問	予想される正答
(AA)	1. (AAA)相似テストが不要なのはなぜですか？	<ul style="list-style-type: none"> 三角形の内角の和が180°であることを用いると、2つの角度から残りの1角が求まるので、(AA)相似テストで十分である。
	2. 2つの合同な三角形は(AA)相似テストを満たしていますか？	<ul style="list-style-type: none"> 合同な三角形の場合、対応する角の大きさは3組とも等しいので、(AA)相似テストを満たしている。
	3. 合同は相似の特殊ケースですか？	<ul style="list-style-type: none"> 2つの三角形が合同ならば2つの三角形は互いに相似であるので、合同は相似の特殊ケースである。

表 4: Thinking Time の設問と予想される誤答

	Thinking Time の設問	予想される誤答
(AA)	2. 2つの合同な三角形は(AA)相似テストを満たしていますか？	<ul style="list-style-type: none"> 2角だけでは合同な三角形は作れず、1辺が必要であるため、2つの合同な三角形は(AA)相似テストを満たしていない。

表4の予想される誤答について、考えられる理由は、この誤答は、設問を「(AA)相似テストを満たしている三角形は合同ですか」と誤解していることと考える。表4の誤答は、この誤解された質問に対しては正答である。表3にあるとおり、(AA)の2に対する正答は「満たしている」であり、「満たしていない」とした表4の解答は誤答となる。

4 おわりに

本研究では、日本の教科書とシンガポールの教科書を用いて、合同条件と相似条件の導入や扱う問題の比較・考察を行った。その結果、シンガポールの教科書の方が生徒に考えさせる構成になっていると感じた。また、シンガポールと日本の教科書の双方に対して、互いに活用できそうな点が見つかった。今後も、図形問題について研究をしていきたい。

参考文献

- [1] 岡本和夫 他 41名, 「未来へ広がる数学3」, 啓林館, 大阪, 2015
- [2] Dr Joseph Yeo, 他 6名, 「NEW SYLLABUS MATHEMATICS 3 (7th Edition)」, Shing Lee Publishers PteLtd, Singapore, 2014
- [3] 国立教育政策研究所, 「OECD 生徒の学習到達度調査 (PISA ~ 2018 年調査国際結果の要約)」, https://www.nier.go.jp/kokusai/pisa/pdf/2018/03_result.pdf, (参照 2022-7-23)
- [4] 啓林館 KEY プロジェクト「5 図形と相似」, https://www.shinkokeirin.co.jp/keirinkan/chu/math/support/keyseat/data/sugaku_3nen2_02.pdf(参照 2022-11-10)