

高等学校数学における思考力を鍛える問題の考察

2019SS015 羽賀貫太

指導教員:佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は、思考力が問われる問題で、思考力をどのように養うのかを考察することで、よりよい授業作りに繋げていくことである。より具体的には、[1], [2]から抽出した問題に対して、

(解法 1) 素朴な解法

(解法 2) 発想力が必要であるが、同じタイプの問題に対しては(解法 1)より効率的な解法

の 2 種類の解法の解を与え、2 つの解を比較して、(解法 2)の発想に至るための力(思考力)の養い方を考察する。

具体的に扱った問題は、[1], [2]から抽出した 3 題であり、以下のとおりである。本稿ではこのうちの(II)の詳細を述べる。

(I) 最大値の問題([2])

(II) 確率の問題([1])

(III) 証明問題([1])

2 思考力を鍛える問題

この節では、前節の(II)の問題に対して、(解法 1)と(解法 2)による解を与え、それらを比較することにより思考力の養い方を考察する。

具体的な問題と 2 つの解は以下のとおりである。解 2 は[1]で与えられた解と本質的に同じであり、解 1 は本研究で与えた解である。

問題 2.1([1]). 赤球 2 個と白球 2 個の合計 4 個の球と袋およびテーブルがあり、はじめは 4 個の球がすべて袋の中に入っている。以下の「操作」を繰り返す。

「操作」:袋から球を 1 個取り出し、テーブルの上に置く。その結果、テーブルの上の赤球が 2 個になったときだけテーブルの上に置いてあるすべての球を袋に戻す。

(1) 「操作」を 3 回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていない確率を求めよ。

(2) 「操作」を 4 回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていない確率を求めよ。

(3) 「操作」を 9 回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていない確率を求めよ。

以下に、2 つの解を示すが、いくつかの約束をしておく。

約束 2.1.

(1) 球の取り出し方は、球の色を並べて示す。たとえば、白赤赤

は、3 個の球を、白球、赤球、赤球、の順に取り出す取り出し方を表す。

(2) テーブルの上に赤球が 2 個になって、その上の置いてあるすべての球を袋に戻す操作を「リセット」という。

(3) 球の取り出し方のうち、途中でリセットが起っているものは、その位置に「/」を入れて表し、この表現をリセット付きの取り出し方という。たとえば、

赤赤/赤赤

は、4 回赤球を取り出し、2 回目の後にリセットが起っていることを表すリセット付きの取り出し方である。

解 1.

(1) 条件を満たす取り出し方は、

赤白赤, 白赤赤

の 2 つで、それぞれの確率は $1/6$ である。よって、求める確率は、これらの和であるから、 $1/3$ である。

(2) 条件を満たすリセット付きの取り出し方は、

赤赤/赤赤, 赤白白赤, 白赤白赤, 白白赤赤

の 4 つである。それぞれの確率は、(1)と同様に計算できて、 $(1/6)^2, 1/6, 1/6, 1/6$ である。求める確率は、これらの和であるから、 $19/36$ である。

(3) 白球が取り出された回数の少ない方から、条件を満たすリセット付きの取り出し方を列挙し、それらの確率を求め、それらの和をとって、求める確率を計算する。

(i) 1 回のとき。白球が何回目に取り出されたかにより、9 とおりの取り出し方がある。この 9 とおりの取り出し方が、条件を満たすかを確認するために、リセット付きの表現で列挙すると、次のようになる。

白赤赤/赤赤/赤赤/赤赤	赤赤/赤赤/白赤赤/赤赤
赤白白赤/赤赤/赤赤/赤赤	赤赤/赤赤/赤白赤/赤赤
赤赤/白赤赤/赤赤/赤赤	赤赤/赤赤/赤赤/白赤赤
赤赤/赤白白赤/赤赤/赤赤	赤赤/赤赤/赤赤/赤白赤
赤赤/赤赤/赤赤/赤赤/白	赤赤/赤赤/赤赤/赤赤/白

最初の 8 とおりは条件を満たすが、最後の取り出し方は、テーブルに白球が残るので、条件を満たさない。よって、8 とおりの取り出し方があり、(1), (2)より、それらの確率はどれも $(1/6)^4$ である。

(ii) 3 回のとき。(i)と同様のリセット付きの取り出し方を並べると、次のようになる(ここでは、最初の 7 個のみを並べる)。

白白白 xx	白白赤赤/赤白赤/赤赤
白白赤白 xx	白白赤赤/赤赤/白赤赤
白白赤赤/白赤赤/赤赤	白白赤赤/赤赤/赤白赤
	白白赤赤/赤赤/赤赤/白

(i)と同様に、上の x も xx もない取り出し方は条件を満たし、xx または x が記された取り出し方は、それを満たさないとわかる。条件を満たすものを数えた結果は、44 とおりであり、(1), (2)より、それらの確率はどれも $(1/6)^3$ である。

白球が取り出された回数が(i), (ii)以外の時は、条件を満たす取り出し方はない。以上より、求める確率は以下のとおりである。

$$(1/6)^4 \times 8 + (1/6)^3 \times 44 = 17/81.$$

解 2. (1)は解 1と同様なので, (2), (3)を示す.

(2) テーブルの上に球が置かれていない状態から「操作」を繰り返すとき, 初めてリセットが起こるのは,

(2.1) 「操作」を 2 回繰り返した時点

(2.2) 「操作」を 3 回繰り返した時点

(2.3) 「操作」を 4 回繰り返した時点

のいずれかである. したがって, 「操作」を 4 回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていないのは, リセット付きの取り出し方が次の(i), (ii)の形の場合である. ただし, 「○」は「白」または「赤」を表す.

(i) ○○/○○○の場合. そのリセット付きの取り出し方は, 赤赤/赤赤

であり, 赤赤である確率が $1/6$ であるから, (i)が起こる確率は $(1/6)^2 = 1/36$ である.

(ii) ○○○○の場合. そのリセット付きの取り出し方は, 赤白白赤, 白赤白赤, 白白赤赤

のいずれかである. 3 つのどの取り出し方も確率は $1/6$ だから, (ii)が起こる確率は $1/6 \times 3 = 1/2$ である.

(i), (ii)より, 求める確率は $1/36 + 1/2 = 19/36$ である.

(3) 上の(2.1), (2.2), (2.3)の時点で初めて起こるリセットをそれぞれ, A, B, C とする. リセットの種類は, この 3 種類に限られる. A, B, C が起こる確率をそれぞれ $P(A), P(B), P(C)$ とすると, (1), (2)より, 以下のとおりである.

$$P(A) = 1/6, \quad P(B) = 1/3, \quad P(C) = 1/2.$$

条件を満たす A, B, C の繰り返し方は, 次のいずれかである.

• B が 3 回起こる.

• A が 3 回, B が 1 回起こる.

• A, B, C が 1 回ずつ起こる.

これらは互いに排反であるから, 求める確率は以下のとおりである.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{4!}{3!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \frac{1}{3} + 3! \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{81}.$$

上の 2 つの解が, それぞれ, 1 節の(解法 1)と(解法 2)の例であることを示すために, 2 つの解を, 2 つの視点(視点 1) 発想のしやすさ

(視点 2) 同じタイプの問題に適用したときの効率性

で比較する. (視点 1)は, 解 1 が個別の取り出し方に注目しているのに対し, 解 2 では, リセットの種類と繰り返し方にも注目していることから, 解 2 での発想力の必要性が分かる. (視点 2)について, 本稿には記載していないが, 本研究では, (1)~(3)における繰り返しの回数が 5 回と 7 回の場合も計算し, 回数が大きくなるほど, 解 1 に対する解 2 の効率性が際立つことを確認している.

次に, 問題 2.1(3)の 2 つの解を比較して, (3)の解 2 の発想に至るための思考力の養い方を考察する. 具体的には, その発想へ誘導する次の各方法を考察する.

(i) リセットの種類とその繰り返し方に注目させる.

(ii) リセット付き取り出し方の表現に現れる, 「/」の個数に注目させる.

(iii) 9 回より少ない回数で考えさせる.

(i) 解 2 の発想を直接誘導する方法で, 自ら考えさせて発想力を養うという視点ではあまりよい誘導とはいえない.

(ii) 「/」の個数は, 2 個か 3 個である. この結論に至るためには, リセットの種類とその繰り返し方を把握する必要がある, そこから解 2 の発想に結びつくと考える. 具体的には, 次の考え方で結論に至ると考える.

考え方. 初めてリセットされるまでの取り出し方は,

A : 2 回の場合(赤赤)

B : 3 回の場合(赤白白赤, 白赤白赤)

C : 4 回の場合(赤白白赤, 白赤白赤, 白白赤赤)

の 3 種類であり, 全部で 9 回だから, その繰り返し方は,

• B が 3 回

• A が 3 回と C が 1 回

• A, B, C が各 1 回

のいずれかである. よって, 「/」の数は, 2 回か 3 回となる.

上の考え方の中に, リセットの種類とその繰り返し方が現れるので, そこから解 2 に結びつくと考える. この誘導では, 「/」の数からリセットの種類と繰り返し方の必要性に気づく発想が必要で, (i)よりは発想力が必要であり, (i)の誘導と比べて, 解 2 の解法へ到達しにくくなっている.

(iii) たとえば, (1)と(2)も誘導であり, この問題のもとの文献([1])はこの誘導を意識していると考え. (2)の 4 回の場合で, A が繰り返し現れることから, 9 回の場合も, リセットの種類と繰り返し方で表現できることへの気づきに結びつくと考える. (ii)の誘導で注目した「/」はその定義から直接リセットに結びつくが, この誘導にはリセットに関する言葉は現れておらず, (ii)の誘導よりは, 解 2 の解法へ到達しにくくなっている.

上の 3 つの方法は, もとの問題が解きやすくなる順に並べている. つまり, (i)を誘導問題にした場合は, (ii)を誘導問題にしたときよりも解 2 の解法に到達しやすくなり, (iii)は最も到達しにくい方法である. 生徒の能力や, 考える時間などにより, 使い分ければよいと考える.

3 おわりに

本研究を通して, 思考力の養い方について理解が深まった. また, 思考力を鍛える問題を解き, 素朴な解法から効率的な解法を得るための発想力(思考力)の養い方を考察することで, さらに深い理解へとつながった. その発想への誘導方法を考察することで, 生徒の理解度に合わせた指導にもつながるだろう. 本研究を通して得た知識を用いて, 思考力を養うことができる授業を構成するための手がかりとしていきたい.

参考文献

- [1] 河合塾数学科, 『これからの大学入試に必要な数学の「思考力」を鍛える問題集』, 河合出版, 東京, 2018
- [2] 『思考力を鍛える数学』, www.mathlion.jp/index.html, (参照 2022-12-22)