数学教育における多様な見方・考え方の考察

−数と式・2 次関数を中心として−

2019SE030 馬渕 大那
指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は，高等学校数学の各内容における多様な見方・考え方を考察し，物事を多面的に捉える指導に役立てることである．多様な考え方に焦点をあてるのは，学習指導要領の改訂に伴い，これまで以上に物事を多面的・多角的に捉える能力が求められるようになったからである．また，本研究の考察は次の視点で行う．

(1)既習の内容とのつながり
(2)問題の意図
(3)複数の解法
(4)性質の発展的考察

具体的な対象は，数研出版の教科書([1])の単元「数と式」および「2次関数」である．本研究で扱った，「数と式」の各内容は，「次数と係数」，「連立不等式」などの4つ，「2次関数」の各内容は，「2次関数のグラフ」，「平方完成」の2つである．

本稿では，このうちの「2次関数のグラフ」と「平方完成」を，それぞれ2節と3節で述べる．

2 「連立不等式」の考察

この節では，「連立不等式」における各内容の多様な見方・考え方を考察する．対象とする内容を教科書[1]から抽出して，図 2.1 に示す．

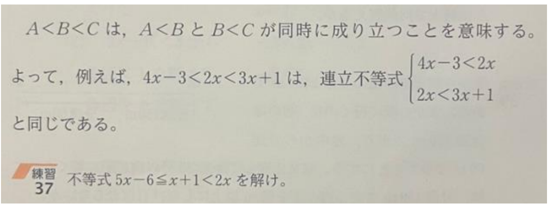

A<B<C は，A<B と B<C が同時に成り立つことを意味する。
よって，例えば，$4x-3<2x<3x+1$ は，連立不等式 $\begin{cases} 4x-3<2x \\ 2x<3x+1 \end{cases}$ と同じである。
練習 37 不等式 $5x-6 \leqq x+1<2x$ を解け。

図 2.1：対象とする連立不等式([1])

この内容に対して，4つの視点のうち，(1),(4)による考察を行った．その詳細は以下のとおりである．

(1)既習内容とのつながり：図 2.1 の内容に関連する内容を教科書[3]から抽出して，図 2.2 に示す．

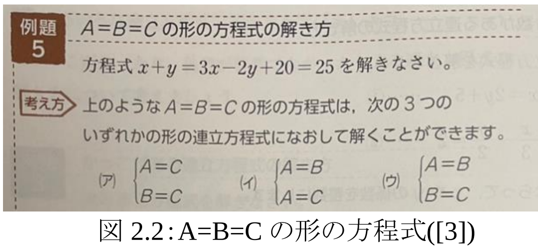

例題 5 A=B=Cの形の方程式の解き方
方程式 $x+y=3x-2y+20=25$ を解きなさい。
考え方 上のようなA=B=Cの形の方程式は，次の3つのいずれかの形の連立方程式になおして解くことができます。
(ア) $\begin{cases} A=C \\ B=C \end{cases}$ (イ) $\begin{cases} A=B \\ A=C \end{cases}$ (ウ) $\begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases}$

図 2.2：A=B=C の形の方程式([3])

図 2.1 の A<B<C の形の不等式を解く際に，図 2.2 の A=B=C の形の方程式が想起されることが考えられる．その際に留意すべきことは，連立させた2式への変換の違いである．具体的には，A<B<C の形の不等式の連立不等式への変換は，「A<B と B<C」の形に限られるのに対し，図 2.2 にあるように，A=B=C の形の方程式は任意の2式（図 2.2 の(ア),(イ),(ウ)）どの形にも変換できる．この違いは，次の(i)が成立するのに対し，(ii)と(iii)はどちらも（「⇐」が）不成立であることから理解することができる．

(i)A=B=C ⇔ A=C かつ B=C ⇔ A=B かつ A=C
(ii) A<B<C ⇔A<C かつ B<C
(iii) A<B<C ⇔ A<B かつ A<C

(ii)，(iii)の「⇐」の反例は，それぞれ，(A,B,C)=(2,1,3)，(A,B,C)=(1,3,2)である．

(4)性質の発展的考察：連立方程式の2式の関係と連立不等式の2式の関係を比較する．連立方程式と連立不等式では，それぞれを解く過程における2式の関わり方が異なる．その違いを，以下の2つの例で示す．

例 1：次の(i)，(ii)の連立不等式を解く．

$$5x-6 \leq x+1, \qquad \text{(i)}$$
$$x+1<2x. \qquad \text{(ii)}$$

(i)より，$x \leq 7/4$．(ii)より，$x>1$．よって，$1<x \leq 7/4$.

例 2：次の(i)，(ii)の連立方程式を加減法と代入法で解く．

$$x+y=25, \qquad \text{(i)}$$
$$3x-2y+20=25. \qquad \text{(ii)}$$

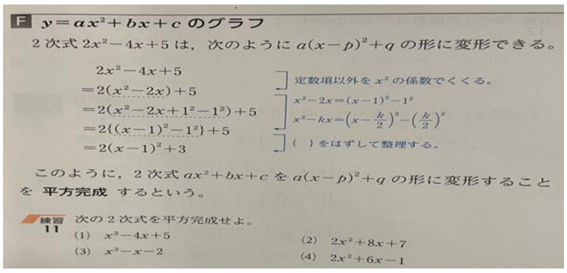
(加減法)(ii)を整理し，(i)を 2 倍した式を足して整理すると，$x=11$，これを(i)に代入して$y=14$.

(代入法) (i)をyについて解くと，$y=25-x$. これを(ii)に代入して整理すると，$x=11$，よって，$y=25-11=14$.

上の例のように，連立不等式では，(i)と(ii)のそれぞれの解を求める．その後，(i)と(ii)を同時に満たす範囲を求め，それを解としている．つまり計算過程において(i)と(ii)の式はそれぞれ独立しており，2式の比較はそれぞれの結果だけで行っていることがわかる．それに対し連立方程式では，加減法でも代入法でも計算過程において，(i)と(ii)の式が従属していることがわかる．これにより，連立不等式と連立方程式の違いとして，2式は「独立関係と従属関係」にあるという違いがあるといえる．

3 「平方完成」の考察

この節では，「平方完成」における各内容の多様な見方・考え方を考察する．対象とする内容を教科書[1]から抽出して，図 3.1 に示す．



F $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

2 次式 $2x^2-4x+5$ は，次のように $a(x-p)^2+q$ の形に変形できる。

$$
\begin{aligned}
&2x^2-4x+5\\
&=2(x^2-2x)+5\\
&=2(x^2-2x+1^2-1^2)+5\\
&=2\{(x-1)^2-1^2\}+5\\
&=2(x-1)^2+3
\end{aligned}
$$

定数項以外を x^2 の係数でくくる。

$x^2-2x=(x-1)^2-1^2$

$x^2-kx=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2$

{ }をはずして整理する。

このように，2 次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを **平方完成** するという。

練習 11 次の 2 次式を平方完成せよ。

(1) x^2-4x+5 (2) $2x^2+8x+7$

(3) x^2-x-2 (4) $2x^2+6x-1$

図 3.1：平方完成の記述([1])

この内容に対して，4つの視点のうち，(1),(4)による考察を行った．その詳細は以下のとおりである．

(1)既習内容とのつながり：既習内容に，2次関数$y=a(x-p)^2+q$のグラフの頂点は(p,q)，軸(の方程式)は$x=p$である，という性質がある．この性質から，2次関数$y=ax^2+bx+c$の右辺を平方完成して，そのグラフの頂点と軸を求められる．これが平方完成の利点の1つである．

また，平方完成の式変形には因数分解の公式（既習）が用いられており，式変形の結果からは解の公式（既習）を導き出すことが可能である．具体的には，平方完成の式変形の過程のうち，以下の網掛けの部分に因数分解が用いられている．

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c\\
&=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c
\end{aligned}
$$

この最後の式を 0 とおいて，xについて解くと，解の公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

を得る．

(4)性質の発展的考察：(1)で，平方完成の利点として，2次関数のグラフの頂点と軸を求められることを挙げた．ここでは，2次関数のグラフの頂点と軸を求める他の方法を3つ挙げて，具体例でその方法で頂点と軸を求められることを確認する．

まず，その3つの方法は以下の方法1～方法3である．ただし，2次関数$y=f(x)$の頂点が(p,q)とわかると軸は$x=p$であり，軸が$x=p$とわかると頂点は$(p,f(p))$であるので，3つの方法は，軸と頂点のどちらかを求めるところまでを示している．

方法 1：2次関数のグラフが軸に関して対称であることを用いて軸を求める．

方法 2：関数の極値が頂点のy座標，極値をとるxの値が頂点のx座標であることを用いて頂点を求める．

方法 3：頂点を(p,q)とすると，与えられた関数のグラフの方程式が$y=a(x-p)^2+q$に一致することを用いて頂点を求める．

具体的に，関数$y=2x^2+8x+7$に対して，上の3つの方法で，頂点または軸を求める．

方法 1 による解：グラフとx軸との共有点が2つ存在すれば，グラフが軸に関して対称であることから，軸は，$x=p$ (pは2つの共有点の中点のx座標)である．この関数の場合，x軸との共有点のx座標は，方程式$0=2x^2+8x+7$を解くことで求められて，その解は，$x=(-4\pm\sqrt{2})/2$であるから，軸は，$x=-2$である．

方法 2 による解：$y=2x^2+8x+7$の増減表をかくと，$x=-2$で極小値-1をとるとわかる．極値が頂点のy座標，極値をとるxの値が頂点のx座標であるため，頂点は$(-2,-1)$である．

方法 3 による解： 頂点を(p,q)のとき，与えられた関数のグラフの方程式が$y=a(x-p)^2+q$に一致することを用いると，

$$2x^2+8x+7=a(x-p)^2+q.$$

右辺を展開して，係数を比較することにより，$a=2$，$p=-2$，$q=-1$を得る．よって頂点は$(-2,-1)$である．

なお，上の方法 1 による解は，グラフとx軸との交点が存在しない場合も，方法 1 を適用できる．具体的には，与えられた関数を$y=ax^2+bx+c$としたとき，解 1 のx軸の代わりに直線$y=c$を用いればよい．

また，グラフとx軸に交点が存在しない場合に，複素数の範囲で解を求めても，形式的に解 1 の筋道をたどって，軸を求めることができる．しかし，求めた虚数解をx座標とする点が存在しないことから，その根拠づけは適切ではない．

4 おわりに

本研究を通して，高等学校数学 I の「数と式」，「2次関数」の多様な見方・考え方の整理をすることにより，教科指導の幅を広げることができた．より具体的には，2 節では，並列した3式の不等式の連立不等式への変換について焦点をあてた指導を行うことで，様々な物事に対して「なぜ成立するのか（しないのか）」という視点を習慣化させることができると考える．この「なぜ」という視点の習慣化は物事に対して，多様な見方・考え方をするための核となる原動力であり，価値のある指導といえると考える．3 節では，グラフの頂点と軸を求める方法について，他単元の考え方を用いて考察することで，数学の面白さを伝える指導に役立つとともに，問題解決の視野を広げることに役立つと考える．

参考文献

[1] 岡部恒治 ほか 17 名,『高等学校 数学 I 』, 数研出版，東京，2014

[2] 岡本和夫・森杉馨・根本博・永田潤一郎 ほか 129 名,『未来へひろがる数学 1,2,3 みんなで学ぼう編』, 啓林館，大阪，2021