現代の表記法からみた代数の歴史

2019SE018 加藤智之
指導教員: 佐々木克巳

1. はじめに

本研究の目的は, 複数の文献により代数の歴史を調べ, それを現代の表記法の視点から考察することで, 数学的知見を深めることである. その視点からの考察では, 代数の歴史に現れる記述を現代の表記法での表現でおきかえること, 現れる問題に現代の表記法における解を与えること, 2 つの解を比較すること, これらから, 歴史に現れるいくつかの代数の特徴を考察することを行う.

本稿では, 2 節で, 代数の歴史とそこに現れる 3 つの代数の特徴を考察し, 3 節では, [2]から抽出した問題を算数的解法(歴史に現れる解法)と代数的解法(現代数学における解法)の 2 通りで解き, 比較する.

2. 代数の歴史

本研究で調べた代数の歴史は, 代数という用語, 今日の代数の成り立ち, 今日の代数に至るまでに現れた 3 つの段階である「修辞的代数」,「省略的代数」,「記号的代数」である. この 3 つの代数については, そこに現れる記述を現代の表記法でおきかえることなどで, それらの特徴を考察した. この節では, この研究結果のうち, この 3 つの代数に関連する内容の一部を述べる.

2.1 節で, 今日の代数に至るまでに現れた 3 つの代数の概要を述べる. 2.2 節〜2.4 節では, 3 つの代数を順に扱い, その各代数の特徴を述べる.

2.1. 3 つの代数

[3]によると, 今日の代数に至るまでに現れた 3 つの代数「修辞的代数」,「省略的代数」,「記号的代数」は次の通りである.

修辞的代数:記号がまったく使用されず, すべて言葉で詳しく述べられる代数
省略的代数:何度も繰り替えして使用される言葉や演算を省略記号に変換して使用する代数
記号的代数:すべての式や演算が文字によって表現される代数

2.2. 修辞的代数

この節では, 修辞的代数の特徴を述べる. 修辞的代数の特徴は, 式自体の記述が長くなる傾向にあること, また, その時代, その地域の言葉を知っておかなければならず, それにより, すべての人が直感的に理解することが困難であることと考える.

その根拠として, 修辞的代数の例である, 古バビロニア時代の代数を取り上げる. 古バビロニア時代の代数が修辞的代数であることは, たとえば, [4]に,「修辞的代数の例として, 古バビロニア時代の代数が挙げられる. (中略) そこには現在にみられるような代数記号等は使用されず, 日常言語である楔形文字が使用されていた」とあることからもわかる. 古バビロニア時代の代数の問題の例として, ベルリンの国立博物館にある粘土板の問題が挙げられる.

以下にその問題を示す.

問題 2.1([1]). 2 つの農地のうち 1 つはサルあたり$\frac{2}{3}$シラの作物を産し, もう 1 つはサルあたり$\frac{1}{2}$シラの作物を産する. 第 1 の農地の作物は第 2 の農地よりも 500 シラ多い. 2 つの農地の面積を合わせると1800 サルである. それぞれの農地はどれくらいの面積か.

ここで, サルは面積の, シラは容積の単位である. その解を現代の表記法に則して表すと, 次のようになり, これを楔形文字だけで表現すると相応の長さになると考える.

解([1]). 2 つの農地の面積を x, y とすると,

$$\begin{cases} x + y = 1800 & (1) \\ 2x/3 - y/2 = 500 & (2) \end{cases}$$

という連立方程式になる.

(1)より, $x = 900$, $y = 900$ と仮定する. このとき, (2)の左辺に代入すると,

$$(2/3) \cdot 900 - (1/2) \cdot 900 = 150$$

となり, (2)の右辺との差は 350 である.

ここで, x を 1 増やし, y を 1 減らした時,

$$(2/3) \cdot 1 + (1/2) \cdot 1 = 7/6$$

となるので,

$$350 \div (7/6) = 300$$

より, x を 300 増やし, y を 300 減らせばよい.

よって, $x = 1200$, $y = 600$ となる.

2.3. 省略的代数

この節では, 省略的代数の特徴を述べる. 省略的代数の特徴は, 修辞的代数で用いられていた言葉や演算の語頭や語尾の文字を使用することにより, 修辞的代数に比べて, 式が簡潔で理解しやすくなっていることと考える.

その根拠として, 省略的代数の例である, 3 世紀頃の古代ギリシア時代の数学者であるディオファントスによる代数を取り上げる. その特徴は, ギリシア文字を用いて数字が表されることにある. ギリシア語のアルファベット α, β, γ, δ…を順に 1, 2, 3, 4, …と割り当てている. また, 定数項は「$\dot{\mathrm{M}}$」, 未知数は「ς」, 2 次の項は「Δ^{Y}」, 3 次の項は「K^{Y}」が使用されている([3]). 例えば, 方程式 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ は,

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \Leftrightarrow \mathrm{K}^{\mathrm{Y}}\alpha'\Delta^{\mathrm{Y}}\beta'\,ς\gamma'\dot{\mathrm{M}}\delta'$$

と表すことができ, 修辞的代数に比べて, 式が簡潔で理解しやすくなっていることがわかる.

2.4. 記号的代数

この節では，記号的代数の特徴を述べる．記号的代数の特徴は，未知数の取り扱いが優れていることと考える．

その根拠として，記号的代数の例である，16 世紀の数学者であるヴィエタの代数を取り上げる．彼は，未知の量に対しては大文字母音の「A，E，I」などを，そして，既知の量に対しては大文字子音の「B，G，Z」などを使用することを提唱した([3])．例えば，今日なら，$x^3 + 4b^2x = 5c^3$ と書くところ，ヴィエタは，$A\ cubus + B\ plano\ 4\ in\ A,$ $aequari\ Z\ solido\ 5$ と表記している．このように，記号的代数は，複数の文字を，それが表すものの種類によって使い分けることで，式から未知数の表すものの種類も読み取れるようになっている．これは，前 2 節の代数と比べ優れている点であると考える．

3. 算数的解法と代数的解法の比較

本研究では，代数に関連する 3 つの問題を，江戸時代の算術書『塵劫記』の現代語訳である[2]から抽出し，その算数的解法（歴史に現れる解法）と代数的解法（現代数学における解法）の 2 通りを示すことで，代数表現の必要性や利点を示した．ここでいう算数的解法とは，代数表現を用いない，つまり既知数の値に対して何かしら演算を施すことで別の値が求まるような解法を指すことにする．この解法による解は，『塵劫記』に記載された解でもあり，その意味で歴史に現れる解法といえる．一方，代数的解法とは，代数表現を用いる，つまり数の代わりに未知数として文字を用いるような解法を指すことにする．この解法による解は，本研究で現代の方法で与えた解であり，現代数学の解法といえる．

ここでは，[2]から抽出した 3 題のうち「絹盗人を知る算」という問題について，2 通りの解を示す．そして，算数的解法と代数的解法を比較した結果を述べる．

以下にその問題を示す．

問題 3.1([2])．何人かの盗人が橋の下で盗品の反物を分配している．橋の上で，その様子を聞いていると，一人に十二反ずつ分けると十二反余り，十四反ずつ分けると六反不足するという．盗品の反物の数と盗人の人数を求めなさい．

ここで，反とは布などの面積を表す単位である．この問題について，算数的解法である解 1 と代数的解法である解 2 を以下に示す．

解 1．この問題の状況を図式すると，次の図 3.1 となる．左の長方形は，12 反ずつ盗人に配ったときの反物の数を表す．また，右上の長方形は，12 反ずつ配ったときに 12 反余ることを表す．そして，右下の長方形は，14 反ずつ配ったときに 6 反不足することを表す．

よって，盗人の人数は図より，

$$(12 + 6) \div 2 = 9$$

より，9 人であると分かる．

したがって，反物の数は，

$$12 \times 9 + 12 = 120$$

より，120 反である．

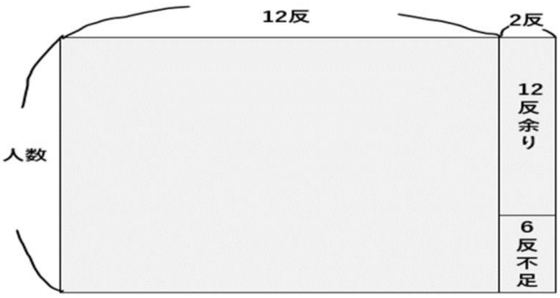

図 3.1：問題 3.1 の図式

解 2．盗人の人数を x とおくと，

$$12x + 12 = 14x - 6$$

と表すことができ，この方程式を解くことで，$x = 9$，すなわち人数が 9 人だと求まる．

よって，反物の数は，

$$12 \cdot 9 + 12 = 120$$

より，120 反である．

上記の 2 解を，数量関係の把握の仕方で比較してみると，解 1 は図式で表現することで把握しているのに対し，解 2 は代数的な式で表現することで把握している．本研究で扱った他の 2 題についても，解 1 は図式で表現することで把握したり，数量関係を把握した結果が解答には明記されなかったりするのに対し，解 2 は問題 3.1 と同様である．このように，算数的解法よりも代数的解法を用いた方が，より問題を単純化して捉えることができる．また，文字や文字式を用いた解法は，算数的な逆思考や図式の使用などに依存することなく問題を解くことも可能である．もちろん，すべての問題に対してそうであるとは言えないが， 問題の難易度を格段に下げるようなものが多数存在するのは明白であると言える．こうした事実を知ることで，文字や文字式を使用することの必要性や利点を感じることができるはずである．

4. おわりに

本研究を通して，今日的な代数表現の成り立ちと，いかに現代の表記法に移り変わっていったかを知ることができた．こうした数学史の流れを理解することで，数学的知見を深めることにつながるだろう．

参考文献

[1] Fukusuke，「【数学史 3-5】バビロニアでは方程式は当たり前？連立方程式の独特な解法とは？」，https://math-his.com/3-5/，（参照 2022-12-04）．

[2] 佐藤健一訳・校注，『『塵劫記』初版本：影印、現代文字、そして現代語訳』，研成社，2006．

[3] 上垣渉，『中学校数学 重要教材研究事典 数と式編』，明治図書，東京，2014．

[4] 梅谷武，「代数記号の歴史」，https://pisan-dub.jp/doc/2011/20110114001/3_1.html，（参照 2022-10-25）．