# 「すべて」と「存在」の論理パズル

2018SS049 新美 雄大
指導教員: 佐々木 克巳

## 1 はじめに

本研究の目的は,「すべて」と「存在」を用いる論理パズルの解法を考察することである. [1]では結論を導く筋道が日本語でふつうに記載されているが, 本研究ではそれを記号化された図式であるタブローを用いて, 記述する. また, [1]の「すべて」と「存在」を扱う論理パズルでは, その前提条件と「求めるもの」が, その解答を見てはじめてはっきりとわかることがある. 本研究では, この前提条件と「求めるもの」を明確にした上で, タブローを用いた解を与える. その明確化の過程では, [1]で与えられた解よりも詳しい内容を「求めるもの」に設定したり, その明確でなかった前提条件を変えて, 新しい前提条件として設定したりすることも行う.

本研究で考察したのは, [1]から抽出した 9 題のパズルである. 本稿では, そのうちの 1 題について述べる. その 1 題は,「求めるもの」の明確化の過程で, [1]で与えられた解よりも詳しい内容を「求めるもの」に設定したパズルである. 本稿では, 2 節で, タブローによる解法を紹介し, 3 節で, その 1 題について, 前提条件と「求めるもの」を明らかにした上で, タブローによる解を考察する.

## 2 タブローによる解法

タブローは, [1]などで, 証明を形式化した図式として紹介されている. この節ではその図式を, 論理パズルを解くために利用するべく, それに特化したタブローの定義と性質を[2]にしたがって述べる. 本稿では,「$P$かつ$Q$」,「$P$または$Q$」,「$P$と$Q$は同値」,「$P$でない」,「すべての$x$に対して$P(x)$」,「ある$x$が存在して$P(x)$」,「矛盾」を, それぞれ, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \equiv Q$, $\sim P$, $\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$, $\perp$と表すことにする. 結合の強さは,「$\sim$」,「$\forall x$」,「$\exists x$」が最も強く,「$\rightarrow$」は最も弱いとする. また, 本稿では$P$と$\sim\sim P$を同一視する.

定義 2.1. 文の有限集合 S に対して, S のタブローを次のように定義する.
(1) S の要素を縦に並べた図は, S のタブローである.
(2) S のタブローT とその 1 つの枝を θ とする.
(2.1) 表 1 の集合$S'$に対して, $S'$の文が θ にすべて現れるとき, T の θ の下に表 1 で$S'$に対応付けられた文$P$を書き加えてできる図は, S のタブローである. ただし, 表 1 における$z$は 未使用の変数である.
(2.2) 表 2 の文$P$が θ にすべて現れるとき, $T$の θ の下に表 2 で$P$に対応付けられた図式$F$を書き加えてできる図は, S のタブローである.

性質 2.2. S は正しい文の集合, T は S のタブローとする. T の, ⊥の現れないどの枝にも現れる文は, どれも正しい. また, ⊥が現れないどの枝にも$P$と$Q$のいずれかが現れるのであれば, $P$か$Q$のいずれかが正しい.

タブローによる解法. 問題文などから明らかに正しいとわかる文の集合に, 定義 2.1(2)の操作を, 次の条件を満たすまで適用したタブローT を作成し, (条件)の「解を導く文」から解を導く方法.
(条件)T の⊥の現れないどの枝にも解を導く文が現れる.

表 1: 定義 2.1(2.1)の$S'$と$P$

| $S'$ | $P$ |
|---|---|
| $Q \wedge R$ | $Q$ |
| $\sim(Q \rightarrow R)$ | |
| $Q \wedge R$ | $R$ |
| $Q, Q \rightarrow R$ | |
| $Q, Q \equiv R$ | |
| $\sim Q, Q \equiv R$ | $\sim R$ |
| $\sim(Q \vee R)$ | |
| $\sim(Q \rightarrow R)$ | |
| $\sim(Q \vee R)$ | $\sim Q$ |
| $\forall x Q(x)$ | $Q(a)$ |
| $\sim\exists x Q(x)$ | $\sim Q(a)$ |
| $\exists x P(x)$ | $P(z)$ |
| $\sim\forall x P(x)$ | $\sim P(z)$ |
| | $P \vee \sim P$ |
| | $\forall x P(x) \vee \exists x \sim P(x)$ |

表 2: 定義 2.1(2.2)の$P$と$F$

| $P$ | $F$ |
|---|---|
| $Q \vee R$ | 図 1 左上 |
| $Q \equiv R$ | 図 1 右上 |
| $Q \rightarrow R$ | 図 1 左下 |
| $\sim(Q \wedge R)$ | 図 1 右下 |

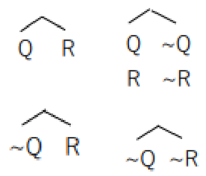


図 1: 表 2 の図

## 3 具体例

この節では, [1]から抽出した 9 題のうちの 1 題について, 前提条件と「求めるもの」を明らかにした上で, タブローを用いた解を与える.

まず, 前提条件を明らかにする. [1]の問題は, ある島の住民の発言から「…について何がわかるか」という形をしていて, この島には次の前提条件がある.

前提条件 3.1.
(1) すべての住民は騎士か悪漢のどちらかである.
(2) 男性の騎士と女性の悪漢は, 常に本当のことを言う.
(3) 男性の悪漢と女性の騎士は, 常に嘘のことを言う.
(4) 少なくとも 1 人の男性と少なくとも 1 人の女性がいる.
また, 上の前提条件 3.1(1)~(3)から導かれる次の性質も用いる.

性質 3.2. $x$が$P$と発言したとき,

$$M_x \to K_x \equiv P,\ {\sim}M_x \to {\sim}K_x \equiv P.$$

ただし, $M_x$は「$x$が男性」を, $K_x$は「$x$が騎士」を表す.

次に,「求めるもの」は, [1]の解答例から, 住民の発言に現れる述語に対する次の(G1), (G2)であるとわかった.
(G1) $\forall x P(x)$と$\exists x{\sim}P(x)$のどちらが成り立つか
(G2) $\forall x{\sim}P(x)$と$\exists x P(x)$のどちらが成り立つか
この問題ではさらに, 発言に現れる述語を「かつ」で結んだ述語に対しても, (G1), (G2)を考察する. この考察は, 以下の問題の解の後に示す.

さて, この節で扱う問題は以下のとおりである.

問題 3.3. すべての住民は(男性も女性も)「この島のすべての住民は騎士だ」と言った. このことから何がわかるか.

解. 問題文に現れる述語は,「$x$は騎士である($K_x$)」と「$x$は悪漢である(${\sim}K_x$)」,「$x$は男性である($M_x$)」,「$x$は女性である(${\sim}M_x$)」の 4 つであり, この 4 つに対して, (G1)と(G2)を求める. 具体的には, 以下のとおりである.
(I) $\forall x K_x$と$\exists x{\sim}K_x$のどちらが成り立つか
(II) $\forall x{\sim}K_x$と$\exists x K_x$のどちらが成り立つか
(III) $\forall x M_x$と$\exists x{\sim}M_x$のどちらが成り立つか
(IV) $\forall x{\sim}M_x$と$\exists x M_x$のどちらが成り立つか

さて, 前提条件 3.1 と性質 3.2 から,

$$\{\exists x M_x,\ \exists x{\sim}M_x,\\ \forall x(M_x \to K_x \equiv \forall x K_x),\ \forall x({\sim}M_x \to {\sim}K_x \equiv \forall x K_x)\}$$

のタブローを作成する. そのタブローは図 2 のとおりである. 図 2 のタブローの枝のうち⊥の現れない枝は 1 つだけで, それをたどると, $\exists x K_x$と${\sim}K_a$が現れて, 後者から$\exists x{\sim}K_x$が導かれる. ゆえに(I)は$\exists x{\sim}K_x$, (II)は$\exists x K_x$である. ゆえに「住民のうち少なくとも一人は悪漢で, また少なくとも一人は騎士である」が解である.

考察. ここでは, 発言に現れる述語を「かつ」で結んだ$M_x \wedge K_x$($x$は男性の騎士, $K'_x$と表す)と${\sim}M_x \wedge K_x$($x$は女性の騎士, $K''_y$と表す)について(G1), (G2)と同様の考察をする. この考察では, これ以降, 3 つの変数$x$, $a$, $b$の動く範囲を男性, 4 つの変数$y$, $c$, $d$, $e$の動く範囲を女性とする. 具体的には以下の 4 つを求める.
(I)$\forall x K'_x$と$\exists x{\sim}K'_x$のどちらが成り立つか
(II)$\forall x{\sim}K'_x$と$\exists x K'_x$のどちらが成り立つか
(III)$\forall y K''_y$と$\exists y{\sim}K''_y$のどちらが成り立つか
(IV)$\forall y{\sim}K''_y$と$\exists y K''_y$のどちらが成り立つか

前提条件 3.1 と性質 3.2 から,

$$\{\forall x\left(K'_x \equiv \forall x K'_x \wedge \forall y K''_y\right),\\ \forall y({\sim}K''_y \equiv \forall x K'_x \wedge \forall y K''_y)\}$$

のタブローを作成する. そのタブローは図 3 のとおりである. 図 3 のタブローの枝のうち⊥の現れない枝は 1 つだけで, それをたどると, $\forall x{\sim}K'_x$が現れて, そこから$\exists x{\sim}K'_x$が導かれる. また, $\forall y K''_y$が現れて, そこから$\exists y K''_y$が導かれる. ゆえに(I)は$\exists x{\sim}K'_x$, (II)は$\forall x{\sim}K'_x$, (III)は$\forall y K''_y$, (IV)は$\exists y K''_y$である. すなわち,「男性は全員(したがって少なくとも一人の男性は)悪漢であり, 女性は全員(したがって少なくとも一人の女性は)騎士である」もわかる.

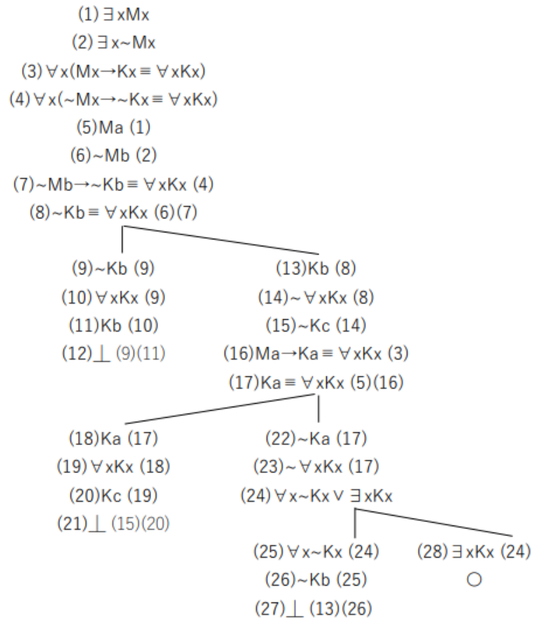


図 2: 問題 3.3 の解のタブロー

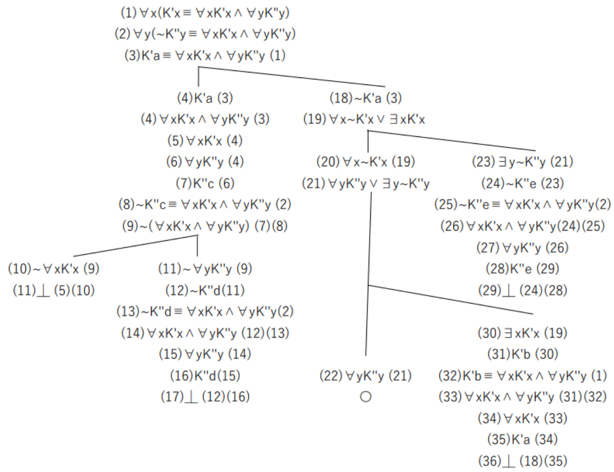


図 3: 問題 3.3 の考察のタブロー

## 4 おわりに

本研究では,「すべて」や「存在」の現れる論理パズルのタブローによる解法を考察した. タブローによる解法では, 問題中の前提条件と「求めるもの」を明らかにした上で, 発言の記号化をし, タブローを作成することで, 解を統一的に記述できることがわかった. また, タブローの構成の仕方の工夫によって「すべて」や「存在」の論理パズルの解を詳細に知ることができることがわかった.

## 参考文献

[1] Raymond Smullyan,『スマリヤン 記号論理学 一般化と記号化』, 丸善出版, 東京, 2013.
[2] 山本健太,「スマリヤンの論理パズルにおける解法の比較―真理値表およびタブローによる解法を中心として―」, 2021 年度南山大学卒業論文, 南山大学, 2021.