PenduBot の最適制御について

2019SC059 鈴木まゆ　2019SC060 多湖翔矢

指導教員：坂本登

1　はじめに

坂本・中島研究室では，これまで倒立振子を題材にした研究は盛んに行われており，倒立振子班では，南山大学に設置されている回転型倒立振子実験機およびそれを題材にした先行研究を参考にして，鉛直方向に回転するアームの先端に，鉛直方向に回転する振子が取り付けられた Pendulum と Robot を組み合わせた，PenduBot の設計とその安定化制御をテーマにした研究を行っている [1]．最近では倒立振子を利用したセグウェイの他に，技術 PR ロボットを村田製作所が開発した．この企業では倒立振子を応用した電動歩行アシストカーの発明が進められており，高齢化社会である現在で，高齢者や足腰が不自由な人の歩行をサポートする機器としてこれから先，期待されている [2]．私たちは倒立振子の研究として回転型倒立振子を扱った機器の代表をするセグウェイの安全性を高める可能性があるのではないかと考え，PenduBot の安定化制御の研究を行うことにした．本研究では，まず初めに，台車駆動倒立振子を例として Matlab/Simulink を用いて制御系設計を行い，倒立振子のシミュレータの理解を深めた．そして，その知識を踏まえ PenduBot の安定化制御を最終目標とし，研究を行った．

2　PenduBot のモデル

PenduBot のモデルを図 1，物理パラメータを表 1 に示す．

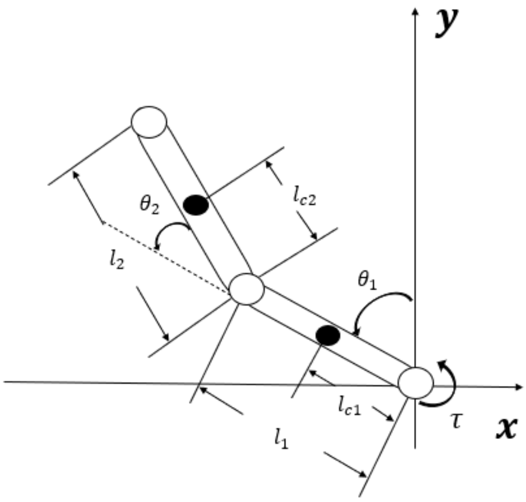

図 1　PenduBot のモデル

表 1　PenduBot の物理パラメータ

記号	名称
m_1	リンク 1 の質量
m_2	リンク 2 の質量
l_1	リンク 1 の長さ
l_2	リンク 2 の長さ
l_{c1}	リンク 1 の回転中心から重心までの長さ
l_{c2}	リンク 2 の回転中心から重心までの長さ
θ_1	リンク 1 の回転角度
θ_2	リンク 2 の回転角度
J_1	リンク 1 の慣性モーメント
J_2	リンク 2 の慣性モーメント
b_1	リンク 2 の粘性摩擦係数
b_2	リンク 2 の粘性摩擦係数
R_a	電気子抵抗
K_e	逆起電力定数
K_t	トルク定数
g	重力加速度
n	モータ側とリンク 1 側のギア比

3　PenduBot の運動方程式 [1]

このシステムの運動方程式を Lagrange 運動方程式を用いて導出し, 式を以下に示す．実験機に搭載する DC サーボモーターの伝達特効性について考える電圧入力を u とする．

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
f_{11} &= r_1 + r_2 + 2r_3 \cos\theta_2 && (2)\\
f_{12} &= f_{21} = r_2 + r_3 \cos\theta_2 && (3)\\
f_{22} &= r_2 && (4)\\
M_1 &= (r_3\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - t_a - b_1)\dot{\theta}_1 \\
&\quad + (r_3\dot{\theta}_1 \sin\theta_2 + r_3\dot{\theta}_2 \sin\theta_2\dot{\theta}_2 \\
&\quad + r_4 \sin\theta_1 + r_5 \sin(\theta_1+\theta_2) + t_b u && (5)\\
M_2 &= r_3\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 - b_2\dot{\theta}_2 + r_5 \sin(\theta_1+\theta_2) && (6)
\end{aligned}$$

と置いた．

4　PenduBot の状態方程式 [1]

状態方程式を以下に示す．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{N_1} & \boldsymbol{N_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_1^{-1} r_2 t_b \\ -D_1^{-1}(r_2+r_3)t_b \end{bmatrix} u \tag{7}$$

ここでは，

$$
\begin{aligned}
D_1 &= r_1 r_2 - r_3^2 \\
\boldsymbol{I} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{N_1} &= D_1^{-1} \begin{bmatrix} r_2 r_4 - r_3 r_5 & -r_3 r_5 \\ (r_1+r_3) r_5 - (r_2+r_3) r_4 & (r_1+r_3) r_5 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{N_2} &= D_1^{-1} \begin{bmatrix} -r_2(t_a+b_1) & (r_2+r_3) b_2 \\ (r_2+r_3)(t_a+b_1) & -(r_1+r_2+2r_3) b_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と置いた．

5 最適制御のシミュレーション

Matlab/Simulink で PenduBot 実験機を倒立状態になるようシミュレーションを行った．全ての状態量 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ の時，倒立状態となる最適制御 (LQR) による安定化を施す．PenduBot のリンク 1,2 の角度 θ_1, θ_2 が共に 0 の倒立状態となるよう Matlab 上で制御器を設計し，非線形モデルに対してシミュレーションを行った．最適制御の構成を図 2 に示す．

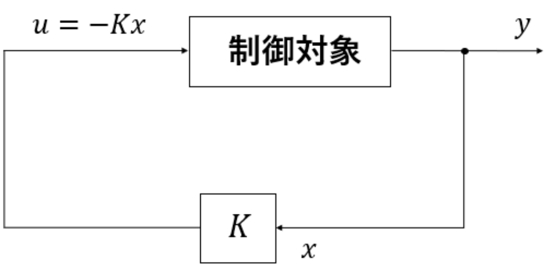

図 2　最適制御の構成

図 3 は最適制御のシュミレーションのモデルを表している．制御対象はシステムの状態方程式である．K は最適フィードバックゲインであり，これは線形化した状態方程式を用いり，評価関数を最小化にする入力を Riccati 方程式の解を使うことで求める．線形最適状態フィードバックは，評価関数

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt, Q \geq 0, R \geq 0 \quad (8)$$

を最小にする最適制御入力を求める.Riccati 方程式の解 P を用いて，

$$u = -Kx = -R^{-1} B^T P x \quad (9)$$

と最適制御入力が得られる．評価関数の重み行列 Q, R は以下のように選んだ．

$$Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1 \quad (10)$$

シミュレーション結果を図 3 に示す．

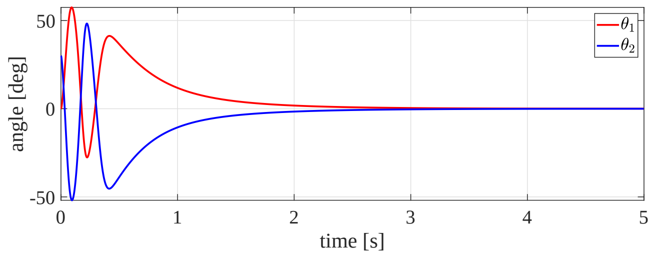

図 3　最適制御のシミュレーション

図 3 は最適制御のシュミレーション結果である．リンク 1，リンク 2 の角度は時間経過とともに 0 に収束していることがわかる．これにより，システムの安定化を施すことが出来た．

6 PenduBot 実験機による安定化実験

実験で扱う PenduBot 実験機は過去に同研究室の磯村氏らが制作した 実験機 [1] を使用する．全ての状態量 $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ の時，倒立状態である．以下に実験時に測定した角度，電圧のデータを図 4，5 に示す．最適制御レギュレータのゲインは以下の値である．

$$K = [122.35 \quad 112.05 \quad 31.51 \quad 22.23] \quad (11)$$

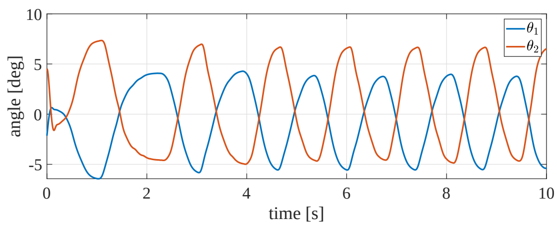

図 4　角度 グラフ

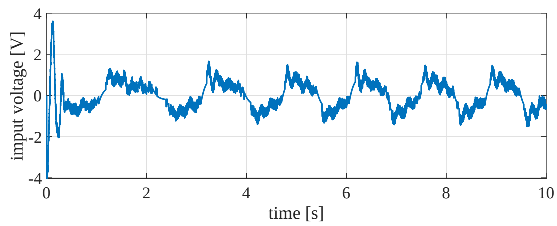

図 5　電圧 グラフ

図 4 の測定した角度を見ると 2 つのリンクは振動している結果だが倒れることはなかった．この原因として PenduBot の不感帯が考えられる．この結果から θ_1, θ_2 が 0 近辺を振動し，左右でバランスを取っていることがわか

れば，倒立状態とする．以上のことから図 4 の実験結果は倒立できているといえる．

7　PenduBot 実験機のシミュレーション

図 4 の測定した角度の結果を見て，リンク 1，リンク 2 の揺れをさらに小さく抑えたいと思った．最適レギュレータのゲインのチューニングを行ったが，揺れが劇的に小さくなることはなかった．PenduBot には動き出すまでの摩擦のような不感帯があると考え，MATLAB 上で不感帯の Dead zone を加えてシミュレーションを行い PenduBot の実験機に近い応答が得られるようにした．以下に PenduBot 実験機の構図を図 6 に示す．

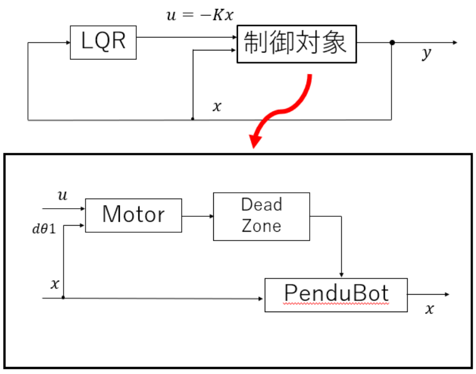

図 6　PenduBot 実験機の構図

Dead zone が 0.1，0.2，0.3 の時，シミュレーションした角度を図 7，8，9 に示す．

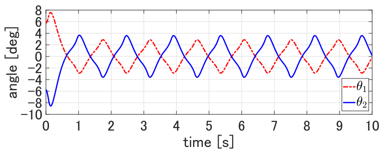

図 7　Dead zone が 0.1 の時のシミュレーションした角度

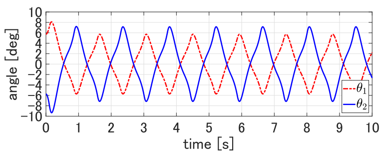

図 8　Dead zone が 0.2 の時のシミュレーションした角度

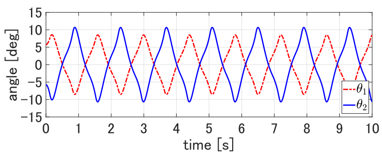

図 9　Dead zone が 0.3 の時のシミュレーションした角度

Dead zone が 0.1，0.3 の時より 0.2 にした方が，θ_1, θ_2 が図の測定した PenduBot 角度，周期に近しい結果を得られた．この結果から外乱オブザーバによる補償を用いて不感帯を補償することでリンク 1，リンク 2 の揺れをさらに抑えることが出来るのではないかと考えた．

8　バネマス系の外乱オブザーバ

不感帯を補償する外乱オブザーバを導入したいが，私たちには外乱オブザーバの経験が少なく，PenduBot に導入することが難しく感じた．PenduBot の不感帯を補償し実験時の揺れを抑え可能な限り倒立状態に近い制御を行いたい．そこで，動摩擦力を不感帯として代用したバネマス系の外乱オブザーバのシミュレーションによる補償を行い，外乱オブザーバの学習をすることにした．外乱オブザーバを Matlab/Simulink 上で作成し，外乱オブザーバによる補償を行っていない場合より，揺れが小さくなるようにする．バネマス系のモデル，物理パラメータをそれぞれ図 10，表 2 に示す．

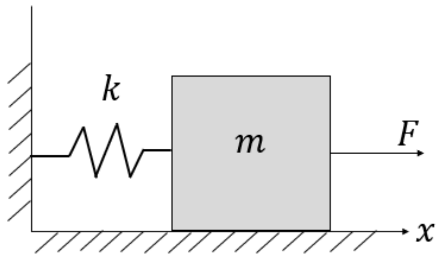

図 10　バネマス系のモデル

表 2　バネマス系の物理パラメータ

記号	名称
m	物体の質量
k	ばね定数
F_{input}	物体に与えた力

このシステムの運動方程式を以下のように求めた．

$$F\_kx = \ddot{x} \tag{12}$$

状態変数を $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$ とし，状態方程式を求めると以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{13}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

外乱オブザーバの構成を図 11 に示す．

制御対象には求めた状態方程式が含まれる．外乱オブザーバ内にある外乱オブザーバゲイン G は以下のように求めた．ただし F_{dz} は不感帯を指す．

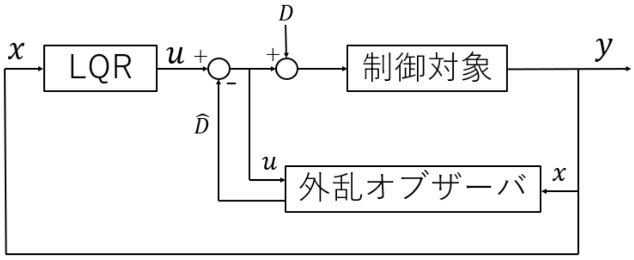

図 11　外乱オブザーバの構成

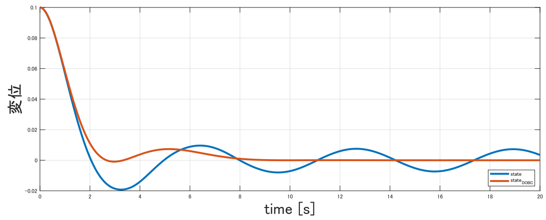

図 12　外乱オブザーバによる補償を行っていない場合と行った場合の比較結果

状態変数を $\boldsymbol{x}_o = \begin{bmatrix} x_{o1} & x_{o2} & x_{o3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & F_{dz} \end{bmatrix}^T$ とし，状態方程式を求めると以下のようになる．

$$\dot{\boldsymbol{x}}_o = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_o + \boldsymbol{B}u \tag{15}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_o \tag{16}$$

外乱オブザーバは以下のようになる．

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_o &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_o + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}\hat{x}_o) + \boldsymbol{B}u \\ &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}_o + \boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_o + \boldsymbol{B}u \end{aligned} \tag{17}$$

ただし，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -K & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & 0 \\ 0 & g_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

である．

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -g_1 & 1 & 0 \\ -k - g_2 & 0 & -1 \\ 0 & -g_3 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}' \tag{20}$$

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{I}\boldsymbol{\lambda}] &= 0 \\ &= \begin{bmatrix} -g_1 - \lambda & 1 & 0 \\ -k - g_2 & -\lambda & -1 \\ 0 & -g_3 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda^3 - g_1\lambda^2 + (-g_2 + g_3 - k)\lambda + g_1 g_3 \\ &= (\lambda + a)^3 \qquad (a \text{ は定数}) \end{aligned} \tag{21}$$

よって，g_1, g_2, g_3が求まり，オブザーバの極は以下のようになる．

$$[-49.99 \quad -49.99 \quad -50]^T \tag{22}$$

外乱オブザーバによる補償を行っていない場合の変位のシミュレーションと外乱オブザーバによる補償を行った変位のシミュレーション結果を比較したグラフを図 12 に示す．

図 12 の state は外乱オブザーバによる補償を行っていないときの変位であり，stateDOBC は外乱オブザーバによる補償を行ったときの変位である．この結果を見ると stateDOBC は state よりも時間経過と共に振動が小さくなっていることがわかる．以上のことから外乱オブザーバにより不感帯を補償し，振動を小さくできたことがわかる．

9　まとめ

PenduBot のシステムの状態方程式から最適制御のシミュレーションを行い，安定化する最適制御のゲインを求め，実験機の安定化実験を行った．実験結果からリンク 1,2 の揺れをさらに抑えたいと考え不感帯を取り除くことで可能ではないかと考えた．実験機のシミュレーションを作成し不感帯を Dead zone とし，不感帯にあたる値を探した．求めた不感帯を取り除くには外乱オブザーバによる補償を用いることで可能であると考え，摩擦を不感帯として代用したバネマス系を用いて外乱オブザーバができた．本研究目標である PenduBot の最安定化適制御は最適制御のレギュレータによる安定化は達成することはできた．

10　今後の課題

今後の課題として不感帯を考慮した安定化制御を行うことが挙げられる．バネマス系で行った外乱オブザーバのように PenduBot での外乱オブザーバによる補償のシミュレーションを行い，リンク 1,2 の揺れが抑えられるのか確認を行い，実験機に取り入れ，試してみるべきだと考える．

参考文献

[1] 磯村真也・野澤武：『PenduBot の製作と安定化制御』．南山大学，2020

[2] 村田製作所：『倒立振子制御」技術を応用した電動歩行アシストカーの開発』．技術広報誌，metamorphosis17 号．

[3] 吉川恒夫・井村順一：『現代制御論』．コロナ社，東京，2014