

# 魔方陣を用いた数学教育

2019SS008 深見有祐衣

指導教員：小藤 俊幸

## 1 はじめに

魔方陣とは、 $n \times n$  個の正方形の方陣に数字をいれ、行、列、対角線も、数の合計が等しくなるものことである。紀元前1世紀ごろから中国の『大戴礼記』や『楊輝算法』に記されている。現代では魔方陣と呼ばれるようになったが、当時は方陣と呼ばれていた。中国以外にも、インドやイスラムもかなり古く発生のちと考えられる。日本では、鎌倉時代末の『二中歴』から出てきているが、江戸時代頃から多くの数学者が研究するようになった ([2], pp.202-204)。

平成29年に改訂された数学の学習指導要領では「数学的な見方・考え方を働かせた学習活動を通して、目標に示す資質・能力の育成を目指すことが述べられている。ここでいわれる資質・能力とは (1) 知識及び技能, (2) 思考力, 判断力, 表現力, (3) 学びに向かう力, 人間性等である。また, 事象を数理的に捉え, 数学の問題を見だし, 問題を自立的, 協動的に解決し, 解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程といった数学的に問題発見・解決する過程を学習過程に反映させることが重要であるとされている [1]。

現在, 魔方陣は, 中学1年生の正の数・負の数での利用や, 高校の数学Aでの数学と人間の活動などで題材として使われている。それは, 新学習指導要領の考えに沿ったものであると思われる。生徒自身が, 問題発見・解決する過程を体験できるような授業を考える。

## 2 親子方陣を用いた授業案

親子方陣とは外圍をとってもその中も方陣になっているものこと言う。正の数・負の数を用いた魔方陣の授業の応用として, 関孝和の考えた親子方陣, 特に外圍の次数が奇数であるものに限定したものを取り扱う授業案をここで考えていく。この授業の目標は

- ・親子方陣のきまりについて関心を持ち, 規則性を調べようとする。
- ・親子方陣の性質を理解し, 様々な親子方陣づくりをすることができる。
- ・自立的, 協動的に課題を解決することができる。

ことである。この授業は魔方陣とは何かの授業を終えたあとの授業案であり中学校1年生を想定し, 50分の授業2時間分とする。課題研究の部分のみ学習指導案の形で書いていく。

## 3 1時間目

### 3.1 導入

5分程度で行う。学習課題「親子方陣とは何か」を提示する。まず前回までの復習として魔方陣とは何であったか

を問いかける。5次方陣を黒板に張り出し確認する。

20	19	35	37	14
34	24	29	22	16
17	23	25	27	33
18	28	21	26	32
36	31	15	13	30

図1 5次方陣例

ここで親子方陣とは何かの予想を生徒にたてさせ, この授業への興味関心を引きつける。

### 3.2 展開

親子方陣について説明し, 外圍を完成させる。

課題研究 (35分)	2 親子方陣 (奇方陣) の説明 (15分)	<p>・親子方陣について説明を行う。親子方陣とは外圍をとってもまた補人となるものこと言う。ここでは, 外圍の次数を奇数とする。</p> <p>ここで, 導入で紹介した魔方陣が親子方陣であることを確かめる。</p> <p>これは, 5次方陣でもあるが, 外圍を取ると <math>3 \times 3</math> のマスが残る。</p> <p>・実際に <math>3 \times 3</math> のマスが魔方陣になっているのか計算をさせる。一人一台タブレットを持っているため, 電卓を使っても良いこととする。</p> <p>実際に計算して全体で確かめることで親子方陣というものについての理解が深まる。</p>
	3 親子方陣作成への準備	<p>外圍の次数を <math>2n + 1</math> とする。</p> <p>上の例では, 5次方陣であるため <math>2n + 1 = 5</math> となるため <math>n = 2</math> となる。</p>
	4 親子方陣の作成 (20分)	<p>この準備は次の親子方陣の外圍を作成するために必要になる。</p>

<p>魔方陣の外圍を A, B, C, D に振り分ける。スタートは右上隅から2つ目の場所である。</p> <p>Aには <math>n</math> 個, Bには <math>n-1</math> 個, Cには <math>n+1</math> 個, Dには <math>n</math> 個の数字を入れる。</p> <p>5次方陣の場合, <math>n=2</math> であるため, Aには2個, Bには1個, Cには3個, Dには2個数字が入る。</p> <p>5次方陣の A, B, C, D の振り分け方はこのようになる。</p>	<p>・本来の関孝和の説明では外圍の分け方は, 甲, 乙, 丙, 丁に分けられるが, 中学生にはわかりにくくなるため A, B, C, D を使用する。</p> <p>・生徒の理解を深めるために視覚的に捉えさせる。</p> <p>・黒板にすべてマスが空白の物を用意し説明と共に前に左の図を書き込んでいく。</p> <p>・外圍に数を入れると次のようになる</p>
--	---

D	D	B	A	A
				C
				C
				C

<ul style="list-style-type: none"> <li>・数字は1から順番にA,B,C,Dに入れていく。</li> <li>・5次方陣では、1から25までの数を使う。外圍の残りの枠で 1+25=26, 2+24=26, …となるように数を入れる。</li> <li>・Aの出発したマスから左にn個、Cの一番下から上にn個の数を相対するマスと入れ替え外圍が完成する。5次方陣の場合n=2個。</li> </ul>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>8</td><td>7</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2 2</td><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td>2 1</td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr> <tr><td>2 0</td><td></td><td></td><td></td><td>6</td></tr> <tr><td>2 4</td><td>1 9</td><td>2 3</td><td>2 5</td><td>1 8</td></tr> </table> <p style="font-size: small;">・入れ替えたことがわかりやすくなるように色を分けて板書する。</p>	8	7	3	1	2	2 2				4	2 1				5	2 0				6	2 4	1 9	2 3	2 5	1 8
8	7	3	1	2																						
2 2				4																						
2 1				5																						
2 0				6																						
2 4	1 9	2 3	2 5	1 8																						

<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>8</td><td>7</td><td>2 3</td><td>2 5</td><td>2</td></tr> <tr><td>2 2</td><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td>2 1</td></tr> <tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td>2 0</td></tr> <tr><td>2 4</td><td>1 9</td><td>3</td><td>1</td><td>1 8</td></tr> </table> <p style="font-size: small;">・中の3次方陣を作成する。</p> <p style="font-size: small;">外圍で1から8までと18から25までの数が使われているから中の方陣では、9から17までの数が使われる。</p>	8	7	2 3	2 5	2	2 2				4	5				2 1	6				2 0	2 4	1 9	3	1	1 8	<p style="font-size: small;">っているため、中も外圍と同じように作ればよいことに気づいてもらいたい。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・3次方陣の場合 2n+1=3 n=1である。</li> <li>・Aにはn個、Bにはn-1個、Cにはn+1個、Dにはn個数が入る。</li> <li>・3次の場合はA,B,C,Dにそれぞれ1,0,2,1個数が入る。</li> </ul>
8	7	2 3	2 5	2																						
2 2				4																						
5				2 1																						
6				2 0																						
2 4	1 9	3	1	1 8																						

8	7	2 3	2 5	2
2 2				4
5				2 1
6				2 0
2 4	1 9	3	1	1 8

図2 5次方陣の外圍

### 3.3 振り返り

10分程度でまとめを行う。演習として3次方陣の場合の外圍を作成する。

まずは個人で考え、その後班の人との相談を許可する。次の授業で答え合わせを行うため、とき終わらなかった場合は宿題とすることを伝える。

## 4 2時間目

### 4.1 導入

7分程度で行う。学習課題「親子方陣はどのように作れるのだろうか」を提示する。前回宿題とした3次方陣の外圍の答え合わせを行う。

4	9	2
3		7
8	1	6

図3 3次方陣の外圍 解答

### 4.2 展開

親子方陣の作成に取り組む。

課題研究 (33分)	<p>2. 親子方陣の作成（奇方陣）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・生活班になり親子方陣を作成する。何次方陣を作成するか決めさせる。</li> <li>・個人思考10分取り、その後班活動15分とする。</li> </ul> <p style="font-size: small;">【5次方陣解答手順】 外圍は1時間目で作ったものを利用する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・外圍の作り方を学んでいるため、その中がどうなっているのかを考えてもらいたい。</li> <li>・個人思考で自立的に、班活動で協働的な学習を促し、問題発見、解決を行うことができるようにする。</li> <li>・親子方陣は外圍をとって方陣にな</li> </ul>
---------------	--	--

<p style="font-size: small;">・外圍に数を埋めていくと</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1 2</td><td>9</td><td>1 0</td></tr> <tr><td>1 5</td><td></td><td>1 1</td></tr> <tr><td>1 6</td><td>1 7</td><td>1 4</td></tr> </table> <p style="font-size: small;">このようになる。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・Aの出発したマスから左回りにn個、Cの最後のマスから上にn個の数を相対するマスと入れ替えるため外圍の完成は次のようになる。残りの真ん中は使われていない数字1 3を入れる。</li> </ul> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1 2</td><td>1 7</td><td>1 0</td></tr> <tr><td>1 1</td><td>1 3</td><td>1 5</td></tr> <tr><td>1 6</td><td>9</td><td>1 4</td></tr> </table> <p style="font-size: small;">3発表（8分）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・できた魔方陣を数班に発表させる。</li> <li>作成した方陣の次数が違うグループを出す。様々な親子方陣を自分たちで作成できることを視覚的に捉えさせる。</li> </ul>	1 2	9	1 0	1 5		1 1	1 6	1 7	1 4	1 2	1 7	1 0	1 1	1 3	1 5	1 6	9	1 4	<p style="font-size: small;">・外圍の埋め方を1時間目と同様にA,B,C,Dで振り分けると以下のようにになる。</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>D</td><td>A</td><td>C</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>C</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table> <p style="font-size: small;">【5次の親子方陣解答】</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>8</td><td>7</td><td>2 3</td><td>2 5</td><td>2</td></tr> <tr><td>2 2</td><td>1 2</td><td>1 7</td><td>1 0</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>1 1</td><td>1 3</td><td>1 5</td><td>2 1</td></tr> <tr><td>6</td><td>1 6</td><td>9</td><td>1 4</td><td>2 0</td></tr> <tr><td>2 4</td><td>1 9</td><td>3</td><td>1</td><td>1 8</td></tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> <li>・今回の演習では班ごとに何次の方陣を作るか決めさせているため、解答として7次、9次などが出てくることも予想される。</li> <li>・7次、9次となっても、同じように外圍から順番に作っていけばよい。</li> </ul>	D	A	C			C				8	7	2 3	2 5	2	2 2	1 2	1 7	1 0	4	5	1 1	1 3	1 5	2 1	6	1 6	9	1 4	2 0	2 4	1 9	3	1	1 8
1 2	9	1 0																																																			
1 5		1 1																																																			
1 6	1 7	1 4																																																			
1 2	1 7	1 0																																																			
1 1	1 3	1 5																																																			
1 6	9	1 4																																																			
D	A	C																																																			
		C																																																			
8	7	2 3	2 5	2																																																	
2 2	1 2	1 7	1 0	4																																																	
5	1 1	1 3	1 5	2 1																																																	
6	1 6	9	1 4	2 0																																																	
2 4	1 9	3	1	1 8																																																	

### 4.3 振り返り

魔方陣、親子方陣とはどのようなものであったかを自分の言葉で説明できるようにまとめさせる。

## 5 おわりに

新学習指導要領では主体的・対話的で深い学びが重要である。この授業案は生徒が自立的に事象を数理的に捉え、問題を見いだせるよう個人思考の時間を必ずとり、その上で対話的に深い学びを見いだせるよう班活動の時間を多く取り入れた。班活動にすることで発言をしやすい、聞きやすい環境を作る。多くの意見を踏まえた自分なりの考えをつくることができる。こういった授業に慣れていくことで、自分の意見を言えることが習慣化させることができる。

生徒が今後生きていく中で社会に必要な力を考え、学習指導要領に沿った授業が行えるよう日々学んでいきたい。

### 参考文献

- [1] 文部科学省：「中学校学習指導要領（平成29年告示）解説 数学編」,2018年。
- [2] 佐藤健一：「和算の事典」. 朝倉書店, 東京, (2009).